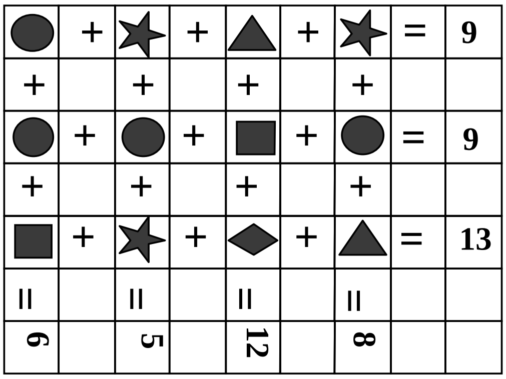
18ème Rallye Mathématique Transalpin, épreuve d'essai Pour la section de Bourg en Bresse

Vous trouverez ci-dessous, les problèmes de la catégorie 4 (CM1) qui sont suivis des analyses à priori et des attributions de points qui sont en vigueur sur le Rallye.
Cette épreuve d'essai doit vous permettre de savoir avec vos élèves si la participation au rallye Est envisageable tout en dégageant des pistes de travail pour le comportement à avoir face à une telle situation.

2. ADDITIONS CODÉES (Cat. 3, 4)

Dans ce tableau, il y a des additions dans les lignes et dans les colonnes.

Chacune des figures (le rond, le carré, l'étoile, le triangle et le losange) remplace toujours un même nombre.



Trouvez par quels nombres il faut remplacer ces dessins pour que toutes les additions soient justes.

Montrez comment vous avez fait pour trouver ces nombres.

3. LES BOITES DE CRAYONS (cat. 3, 4)

Cinq boîtes de crayons sont exposées dans la vitrine d’une papeterie.

Leurs prix sont :

5 € 8 € 10 € 12 € 13 €

Après quelques jours, le papetier en a vendu quatre : une à Alex, une à Brice, une à Carla et une à David.

- Alex a payé uniquement avec des pièces de 2 euros et on ne lui a rien rendu.
- Brice a dépensé 3 euros de plus que Carla.
- David a payé avec deux billets de 5 euros et le marchand lui a rendu de la monnaie.

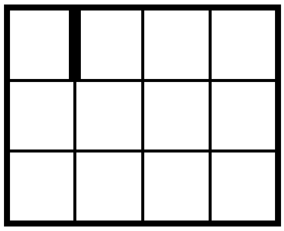
Quel est le prix de la boîte achetée par Alex ?

Expliquez votre réponse.

4. PAS DE JALOUX (Cat. 3, 4, 5)

Amandine veut partager ce rectangle en deux parties ayant chacune le même nombre de carreaux, mais pas forcément la même forme. Tous les carreaux doivent rester entiers et le découpage doit donc suivre les lignes du quadrillage.

Amandine a commencé le partage, en traçant un premier trait (plus large sur la figure) :



Continuez le partage commencé par Amandine.

Trouvez toutes les façons de continuer le partage d'Amandine pour obtenir deux parties ayant le même nombre de carreaux.

5. BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Anne, Béatrice et Charles ont joué aux billes avec d'autres camarades.
À eux trois, ils ont gagné 20 billes en tout.
Charles a gagné deux fois plus de billes que Béatrice.
Anne n'a pas gagné plus de billes que Béatrice.

Combien de billes peut avoir gagné chacun des trois enfants ?

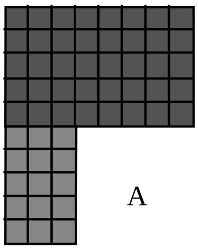
Expliquez votre raisonnement.

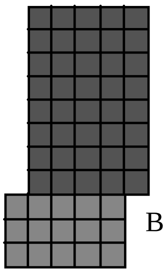
6. LES DEUX RECTANGLES (Cat. 4, 5, 6)

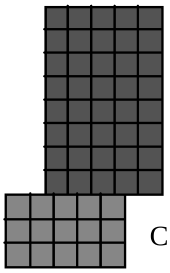
On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

(Exemples : Les figures A et B sont correctes. La figure C est incorrecte car il y a des carreaux d'un rectangle qui touchent deux carreaux de l'autre rectangle.)


A


B


C

Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ?

Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.

7. CARTES CARREES (Cat. 4, 5, 6)

Grégory a 81 cartes carrées, de même dimension, avec une face blanche et l'autre face grisée.

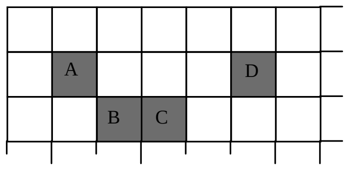
Il les dispose toutes, les unes contre les autres, pour obtenir un grand carré entièrement blanc.

Thomas lui propose un défi : *Essaie de retourner le plus possible de cartes pour faire apparaître leur face grisée.*

Mais attention, à la fin, chaque face grise devra avoir au moins 7 faces voisines blanches.

Deux cartes sont voisines si elles ont un sommet ou un côté commun.

(Dans cet exemple, les cartes A et C avec les faces grises ont 7 voisines avec des faces blanches, et D en a 8, mais B n'en a que 6 !)



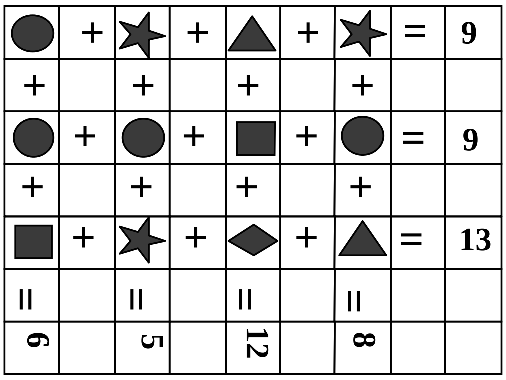
Combien de cartes Grégory peut-il retourner au maximum ?

Expliquez votre raisonnement et dessinez une de vos solutions.

2. ADDITIONS CODÉES (Cat. 3, 4)

Dans ce tableau, il y a des additions dans les lignes et dans les colonnes.

Chacune des figures (le rond, le carré, l'étoile, le triangle et le losange) remplace toujours un même nombre.



Trouvez par quels nombres il faut remplacer ces dessins pour que toutes les additions soient justes.

Montrez comment vous avez fait pour trouver ces nombres.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition
- Logique : organiser et gérer un raisonnement

Analyse de la tâche

- Comprendre que deux figures différentes représentent deux nombres différents.
- Procéder par essais en attribuant des valeurs aux différentes figures, calculer les sommes et vérifier l'égalité avec les nombres écrits en bout de lignes ou en bas de colonnes.

Ou :Remarquer que pour passer de la première colonne à la deuxième ligne, on ajoute le rond, d'où sa valeur : 9 - 6 = 3. De même on trouve le triangle comme différence entre la première ligne et la deuxième colonne, donc 4. Et on trouve l'étoile en comparant la troisième ligne et la troisième colonne. Ensuite le carré s'obtient en soustrayant trois ronds à la deuxième ligne. Pour finir, le losange sera calculé dans la troisième colonne par exemple.

Ou: Procéder par hypothèses et déductions. Par exemple, attribuer la valeur 1 au rond et déduire en utilisant la première colonne que le carré vaut alors 4. Remplacer le rond par 1 et le carré par 4 à la seconde ligne et constater que la somme est différente de 9. Recommencer avec une autre valeur pour le rond.

- Arriver enfin à la solution : rond : 3 , carré : 0, étoile : 1, triangle **:** 4, losange : 8.

Attribution des points

4 Réponse correcte « rond : 3 , carré : 0, étoile : 1, triangle **:** 4, losange : 8 » avec description de la procédure

3 Réponse correcte (les 5 valeurs exactes) sans description ou quatre valeurs exactes avec description

2 Quatre valeurs exactes sans description ou trois valeurs exactes avec description

1 Trois valeurs exactes sans description ou deux valeurs exactes avec description

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4

Origine : Bourg-en-Bresse

3. les boîtes de crayons (cat. 3, 4)

Cinq boîtes de crayons sont exposées dans la vitrine d'une papeterie.

Leurs prix sont :

5 € 8 € 10 € 12 € 13 €

Après quelques jours, le papetier en a vendu quatre : une à Alex, une à Brice, une à Carla et une à David.

- Alex a payé uniquement avec des pièces de 2 euros et on ne lui a rien rendu.
- Brice a dépensé 3 euros de plus que Carla.
- David a payé avec deux billets de 5 euros et le marchand lui a rendu de la monnaie.

Quel est le prix de la boîte achetée par Alex ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction
- Logique : déduction

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème et leurs conséquences :
  Alex n'a pas pu acheter la boîte à 5 € ni celle à 13 € ;
  Brice et Carla ont payé respectivement 8 € et 5 € ou bien 13 € et 10 € ;
  David n'a payé ni 5 € (il a donné 2 billets de 5 €), ni 10 € (on lui a rendu de l'argent), ni 12 €, ni 13 € (2 billets de 5 € n'auraient pas suffi). Il a donc payé 8 €.
  Par conséquent Brice et Carla ont payé respectivement 13 € et 10 € et la boîte d'Alex coûte 12 €.

Ou : comprendre immédiatement que la dernière condition permet de déterminer immédiatement le prix de la boîte de David, puis celles de Brice et Carla et enfin celle d'Alex, comme unique nombre pair restant à disposition.

Attribution des points

4 Réponse correcte (12 €) avec une explication du raisonnement utilisé

3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou peu claire (par exemple, ne fournissant pas tous les éléments du raisonnement)

2 Réponse correcte sans aucune justification
ou une réponse avec une seule erreur, mais avec explications

1 Début de raisonnement correct non abouti

0 Incompréhension du problème

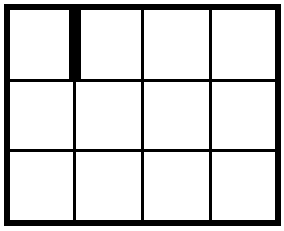
Niveau : 3 - 4

Origine : Parma

4. PAS DE JALOUX (Cat. 3, 4, 5)

Amandine veut partager ce rectangle en deux parties ayant chacune le même nombre de carreaux, mais pas forcément la même forme. Tous les carreaux doivent rester entiers et le découpage doit donc suivre les lignes du quadrillage.

Amandine a commencé le partage, en traçant un premier trait (plus large sur la figure) :



Continuez le partage commencé par Amandine.

Trouvez toutes les façons de continuer le partage d'Amandine pour obtenir deux parties ayant le même nombre de carreaux.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie

Analyse de la tâche

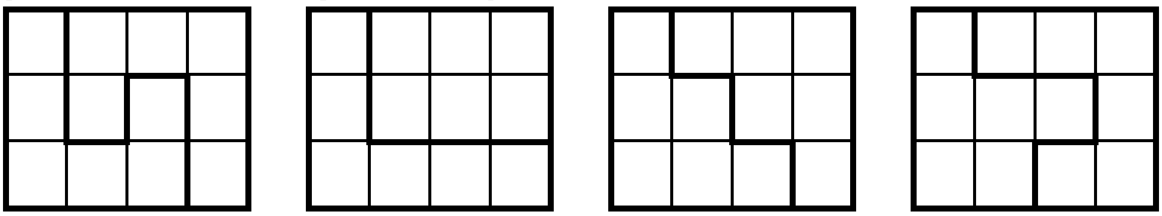
- Procéder par essais en partageant le rectangle en deux parties et en comptant le nombre de carreaux contenus dans chacune des parties.

Ou : Poursuivre le tracé commencé par Amandine en contrôlant dans le même temps le nombre de carreaux de part et d'autre de la ligne tracée.

Ou : Dénombrer le nombre de carreaux contenus dans le rectangle, le diviser par 2 et tracer une ligne de façon à faire apparaître une partie contenant exactement 6 carreaux

Attribution des points

4 Réponse correcte : les 4 bonnes possibilités uniquement :



3 Les 4 bonnes possibilités et une solution erronée (parties non équivalentes, partage ne suivant pas les lignes, répétition d'un partage)
ou 3 possibilités correctes, sans réponse erronée

2 Trois possibilités correctes et une solution erronée
ou 2 possibilités correctes, sans solution erronée
ou quatre possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

1 Deux possibilités correctes avec présence d'une ou plusieurs solutions erronées
ou une possibilité correcte avec présence ou non de solutions erronées
ou trois possibilités correctes accompagnées de plus d'une réponse erronée

0 Absence de réponse correcte ou incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

Origine : Bourg-en-Bresse

5. BILLES (Cat. 3, 4, 5)

Anne, Béatrice et Charles ont joué aux billes avec d'autres camarades.
À eux trois, ils ont gagné 20 billes en tout.
Charles a gagné deux fois plus de billes que Béatrice.
Anne n'a pas gagné plus de billes que Béatrice.

Combien de billes peut avoir gagné chacun des trois enfants ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition et décomposition additive

Analyse de la tâche

- Commencer la recherche par le nombre de billes de B. Par exemple : si B a 1 bille, C en a 2, mais A ne peut en avoir gagnée qu'une et la somme n'est pas 20 ; si B a 2 billes, C en a 4 et A 1 ou 2, ce qui ne donne toujours pas une somme de 20, et ainsi de suite jusqu'au cas où B en a 5, C 10 et A 5 et au cas où B en a 6, C 12 et A 2. On vérifie ensuite que si on augmente encore le nombre de billes de B, on arrive à une somme supérieure à 20.

Ou : comprendre que le nombre de billes de Charles est pair. Commencer par faire un choix de nombres pour celui-ci. Se rendre compte que 20, 18, 16 et 14 sont trop grands, examiner 12 et trouver 6 pour B et 2 pour A, puis examiner 10, qui conduit à 5 pour B et 5 pour A et finalement constater que pour les nombres pairs suivants, 8, 6, … le nombre de billes de A serait supérieur à celui de B.

Ou : décomposer 20 en une somme de trois nombres et vérifier que les conditions sont respectées.

Ou : diviser 20 par 4, constater que 5 (A), 5 (B), 10 (C) est une solution convenable ; essayer ensuite avec 6 (B) e 12 (C) et par conséquent 2 (A) et déduire qu'il n'y a pas d'autres solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte : les deux solutions (Anne : 5, Béatrice : 5, Charles : 10 et Anne : 2, Béatrice : 6, Charles : 12) avec explication de la démarche qui montre qu'il n'y a pas d'autre solution

3 Les deux solutions correctes avec explications peu claires, incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Les deux solutions correctes sans explication ou une solution avec explications

1 Une solution correcte sans explication ou début de résolution organisée

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3 - 4 - 5

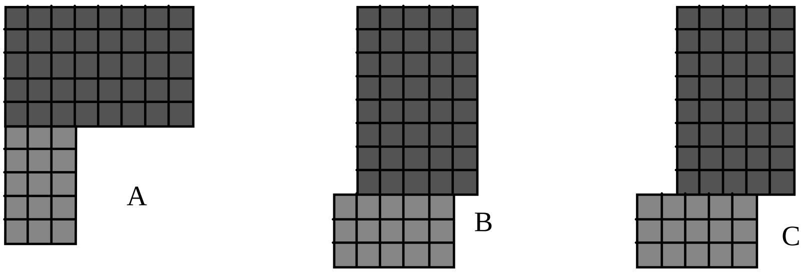
Origine : Parme

6. LES DEUX RECTANGLES (Cat. 4, 5, 6)

On découpe deux rectangles dans une feuille de papier quadrillé, en suivant les lignes du quadrillage. Les dimensions du premier rectangle sont 5 et 8, celles du second sont 5 et 3 (unité : le côté d'un carré du quadrillage).

On place ces deux rectangles l'un contre l'autre, sans les superposer, de façon à ce qu'ils se touchent par un ou plusieurs côtés entiers de carreaux. (Un carreau d'un rectangle ne peut en toucher qu'un seul de l'autre rectangle, par un côté entier.) On peut obtenir ainsi de nombreuses figures.

(Exemples : Les figures A et B sont correctes. La figure C est incorrecte car il y a des carreaux d'un rectangle qui touchent deux carreaux de l'autre rectangle.)



Les figures obtenues n'ont pas toutes le même périmètre. Par exemple, le périmètre de A mesure 36 unités, celui de B en mesure 34.

Quel est le plus petit périmètre que peut avoir une figure obtenue en assemblant ces deux rectangles en respectant les règles d'assemblage ?

Et quel est le plus grand périmètre qu'on peut obtenir ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez vos solutions.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangles, polygones et périmètres
- Arithmétique : additions

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé, comprendre les règles de formation des figures à partir des deux rectangles et ce que représente leur périmètre en s'aidant pour cela des deux exemples fournis.
- Dessiner d'autres figures ou les construire par déplacements de rectangles mobiles découpés dans du papier quadrillé et calculer leur périmètre. Trouver ainsi, par essais successifs, que le plus petit périmètre est 32 et le plus grand 40.
- Comprendre que le périmètre des figures est plus petit que la somme des deux périmètres des rectangles (42 = 26 + 16) et qu'il dépend de la longueur de la partie commune, indépendamment de la forme de la figure, ce qui permet d'expliquer que, si cette partie mesure 1 (la plus petite possible), le périmètre sera 42 – 2 x 1 = 40 et si cette partie mesure 5 (la plus grande possible), le périmètre sera 42 – 2 x 5 = 32.

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (32 et 40) avec explications (reposant sur la variation du périmètre en fonction de la longueur de la partie commune) et avec les dessins d'une des figures ayant le plus petit périmètre et d'une des figures ayant le plus grand périmètre (par exemple, le rectangle de 11 x 5) ou par un inventaire de toutes les possibilités.

3 Les deux réponses correctes, avec le dessin d'une des deux figures seulement, ou la présence des figures correctes mais avec erreurs de calcul du périmètre (écart d'une ou deux unités par rapport à la valeur exacte)

2 Les deux réponses correctes, sans aucune explication ni figure
ou une seule réponse correcte avec les deux figures

1 Une des deux réponses correctes, avec une seule des deux figures
ou deux réponses proches, avec dessins correspondants

0 Incompréhension

Degrés : 4 - 5 - 6

Origine : CI, D'après une idée de François Drouin, Irem de Lille, (voir revue APMEP 2003)

7. CARTES CARREES (Cat. 4, 5, 6)

Grégory a 81 cartes carrées, de même dimension, avec une face blanche et l'autre face grisée.

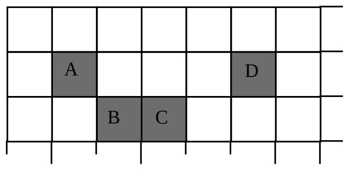
Il les dispose toutes, les unes contre les autres, pour obtenir un grand carré entièrement blanc.

Thomas lui propose un défi : *Essaie de retourner le plus possible de cartes pour faire apparaître leur face grisée.*

Mais attention, à la fin, chaque face grise devra avoir au moins 7 faces voisines blanches.

Deux cartes sont voisines si elles ont un sommet ou un côté commun.

(Dans cet exemple, les cartes A et C avec les faces grises ont 7 voisines avec des faces blanches, et D en a 8, mais B n'en a que 6 !)



Combien de cartes Grégory peut-il retourner au maximum ?

Expliquez votre raisonnement et dessinez une de vos solutions.

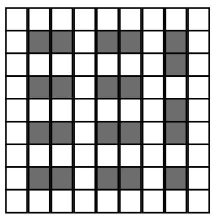
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : positions relatives de carrés dans un quadrillage
- Logique et raisonnement : recherche d'une disposition maximale

Analyse de la tâche

- Comprendre que le carré initial est un quadrillage de 9 x 9, dont toutes les cases sont blanches.
- Comprendre que l'expression « au moins 7 » se traduit ici par 7 ou 8.
- Comprendre que les cartes retournées ne peuvent pas être celles du bord car elles n'auraient que 5 voisines blanches, ni celles des angles car elles n'auraient que 3 voisines blanches.
- Se rendre compte que les faces grises « isolées » à l'intérieur de la grille ont chacune 8 voisines blanches et répondent ainsi à la condition. Si toutes les faces grises étaient isolées, on pourrait en placer au maximum 16, régulièrement.
- Se rendre compte ensuite que deux faces grises peuvent avoir un côté ou un sommet commun et, par exemple, former un rectangle de 2 x 1. On peut ainsi placer 10 rectangles de ce type, isolés les uns des autres, et une face grisée seule, ce qui fait monter le nombre total des cases grisées à 21.



Attribution des points

4 Réponse optimale (21) avec explications et une grille correctement dessinée

3 Réponse optimale (21) avec explication peu claire et sans dessin
ou réponse « 20 » avec explications ou dessin

2 Réponse optimale (21) sans explication ni dessin

1 Réponse (20) sans explications ni dessin
ou réponse (différente de 21 et 20) avec dessin respectant la condition de voisinage

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4 - 5 - 6

Origine : Rencontre de Bourg-en-Bresse, sur une idée de Suisse romande