

19^{ème} Rallye Mathématique Transalpin, épreuve d'essai Section de Bourg en Bresse



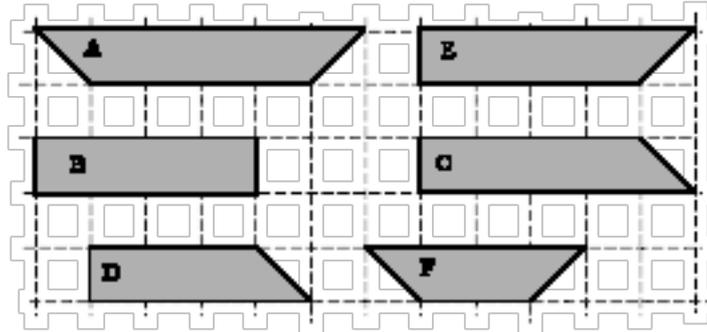
Vous trouverez ci-dessous, une épreuve d'essai pour la catégorie 5 (CM2).

Les problèmes sont suivis des analyses à priori et des attributions de points qui sont en vigueur sur le Rallye.

Cette épreuve d'essai doit vous permettre de savoir avec vos élèves si la participation au rallye est envisageable tout en dégagant des pistes de travail pour le comportement à avoir face à une telle situation.

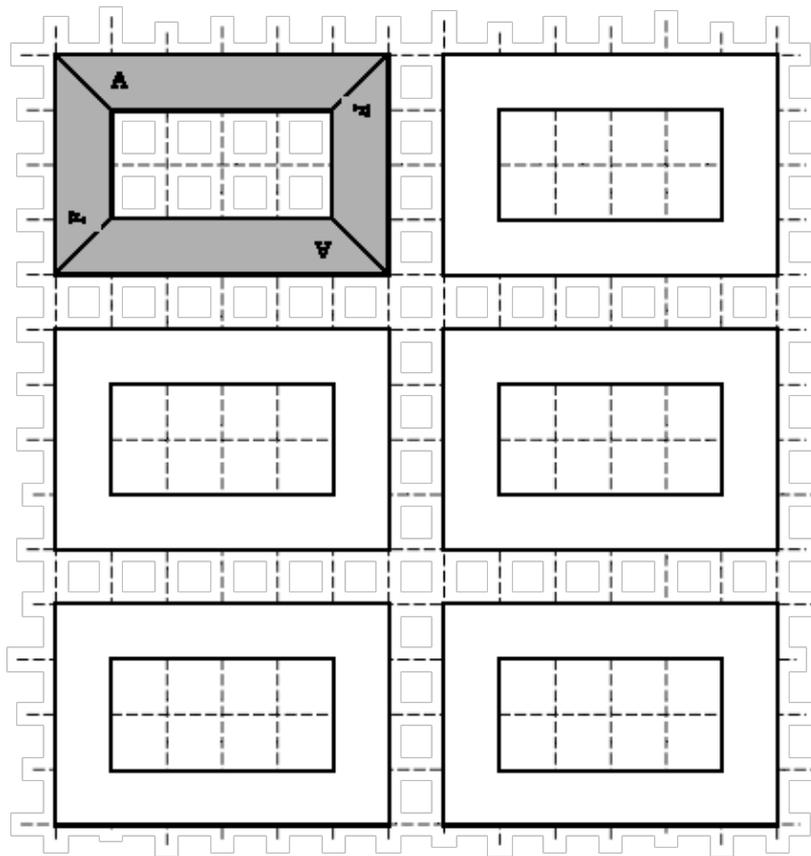
5. RUBAN ADHESIF (Cat. 3, 4, 5)

Dans un ruban de papier adhésif, Jacques a découpé plusieurs bandes, de 6 modèles différents : A, B, C, D, E et F :



Il a recouvert le cadre d'un tableau en y collant 4 bandes : 2 du modèle A et 2 du modèle F qui ne se superposent pas.

Jacques se demande s'il aurait pu recouvrir le cadre de manière différente.



Trouvez toutes les manières de recouvrir le cadre, différentes de celle de Jacques, avec quatre bandes, sans que les bandes se superposent.

Dessinez vos solutions, toutes différentes, sur les modèles préparés en blanc, en notant le nom des modèles utilisés.

Attention : les bandes adhésives ne se collent que sur une face, on doit toujours voir la lettre

6. NOMBRES REPETES (I) (Cat. 4, 5)

Dans la table de multiplication « des nombres qui parlent », le 36 et le 40 ont déjà trouvé leurs places.

Le nombre 40 dit au nombre 36 : *Tu n'es que trois fois dans la table de multiplication des nombres de 1 à 10. Moi, j'y suis quatre fois et je vaux 4 de plus que toi.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4									36	40
5								40		
6						36				
7										
8					40					
9				36						
10				40						

Quels sont les nombres qui pourront dire la même phrase à un autre lorsque la table sera complétée ?

Indiquez tous les nombres qui sont quatre fois dans la table et qui valent 4 de plus qu'un nombre qui n'y est que trois fois.

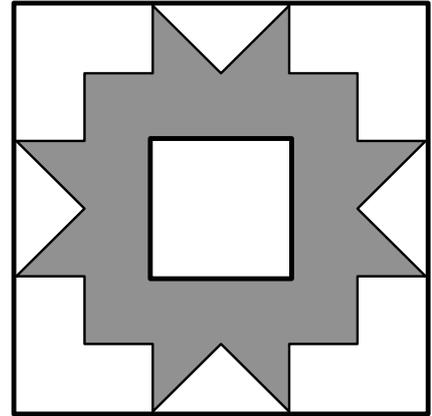
Expliquez comment vous les avez trouvés.

7. LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



8. LES CRAYONS DU 15^E RMT (Cat. 5, 6)

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15^e RMT.

À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15^e RMT, 2007 » sur chaque crayon.

Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15^e RMT, 2007 ».

Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?

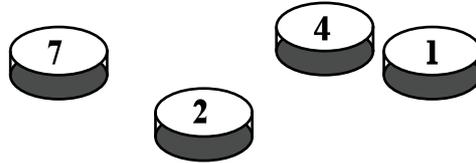
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

9. LES JETONS DE FRANÇOISE (Cat. 5, 6)

Françoise a quatre jetons.

Elle observe que, sur chacune des huit faces est écrit un nombre différent, de 1 à 8.

Elle lance ses quatre jetons une première fois et elle voit apparaître le 7, le 2, le 4 et le 1, comme sur la figure ci-dessous :



Elle lance encore ses jetons une deuxième fois et elle obtient le 6, le 4, le 5 et le 2 ;

puis une troisième fois, elle obtient le 8, le 2, le 6 et le 5.

Enfin elle les jette une quatrième fois et obtient le 7, le 4, le 3 et le 5.

Quels sont les nombres qui figurent sur chacun des jetons, l'un sur une face et l'autre sur la face opposée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

10. MACHINE A CALCULER 😊 (Cat. 5, 6, 7)

Sophie possède une sorte de machine à calculer munie d'une touche 😊 .

Quand Sophie tape puis 😊 , sa machine affiche :

Quand Sophie tape puis 😊 , sa machine affiche :

Quand Sophie tape puis 😊 , sa machine affiche :

**Quand Sophie tape 9 puis 😊 , que pourrait afficher sa machine ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

11. LE CHAMP AGRANDI (Cat. 5, 6, 7)

Le père Julien possède un champ carré entouré d'une clôture. Son voisin accepte de lui vendre un peu de terrain pour l'agrandir en un carré ayant des côtés d'un mètre de plus. La surface de son champ augmente ainsi de 41 m².

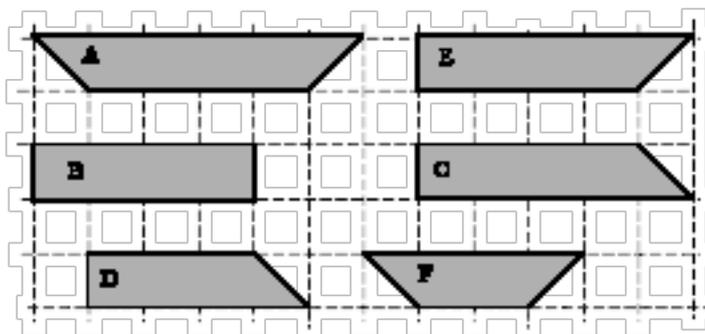
Quelle était la longueur des côtés de son ancien champ ?

Maintenant que le terrain est plus grand, la clôture précédente n'est plus suffisante : combien de mètres de clôture manquent-ils ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

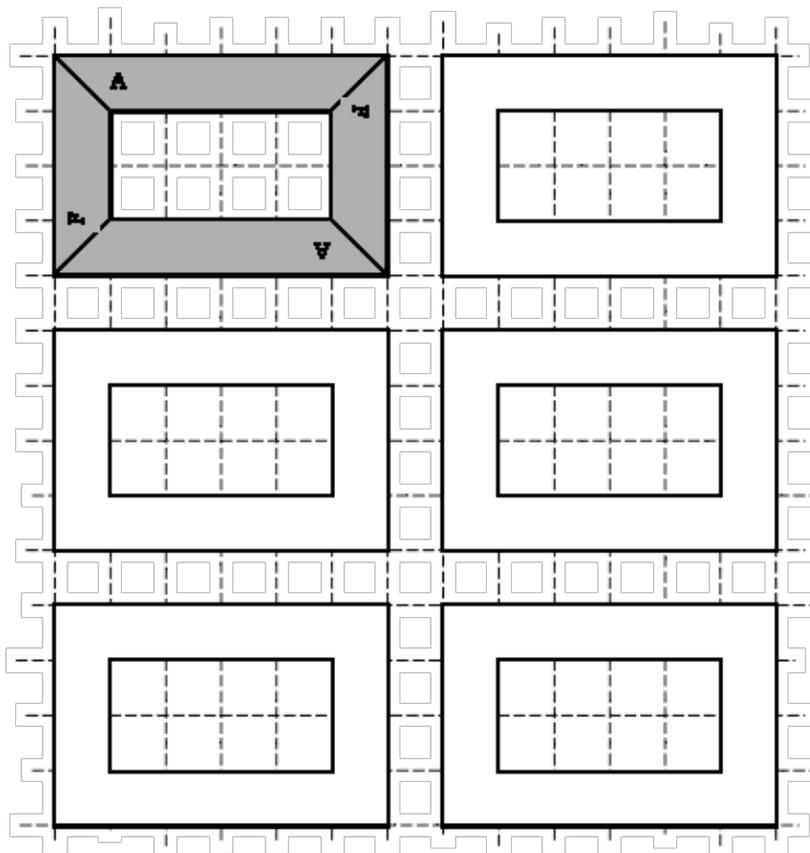
5. RUBAN ADHESIF (Cat. 3, 4, 5)

Dans un ruban de papier adhésif, Jacques a découpé plusieurs bandes, de 6 modèles différents : A, B, C, D, E et F :



Il a recouvert le cadre d'un tableau en y collant 4 bandes : 2 du modèle A et 2 du modèle F qui ne se superposent pas.

Jacques se demande s'il aurait pu recouvrir le cadre de manière différente.



Trouvez toutes les manières de recouvrir le cadre, différentes de celle de Jacques, avec quatre bandes, sans que les bandes se superposent.

Dessinez vos solutions, toutes différentes, sur les modèles préparés en blanc, en notant le nom des modèles utilisés.

Attention : les bandes adhésives ne se collent que sur une face, on doit toujours voir la lettre

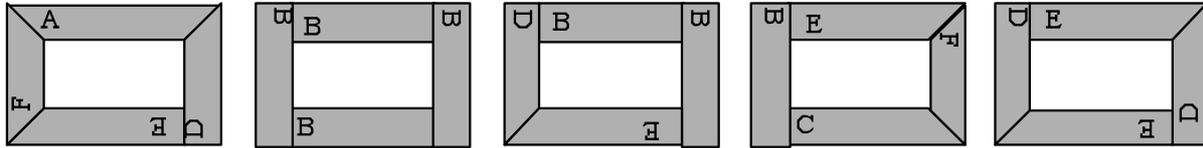
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : décomposition et composition d'une figure, isométries

Analyse de la tâche

- Comprendre que les bandes choisies ne doivent pas se superposer, mais qu'elles peuvent s'orienter et se déplacer par rotations et translations.
- Découper des bandes et essayer de les placer, ou chercher à les dessiner sur les cadres.
Au cours de ces essais, il faut prendre conscience, que les bandes C, D et E n'ont pas d'axe de symétrie et qu'il ne faut pas les confondre avec des formes symétriques par rapport à un axe. Il faut aussi tenir compte des « longueurs » des bandes (A : 6 et 4 carrés, E et C : 5 et 4, B : 4 et 4, D : 4 et 3 et F : 4 et 2.)
- Découvrir les cinq autres solutions : (A, D, E, F), (B, B, B, B), (B, B, D, E), (B, C, E, F) et (E, D, E, D) et éliminer celles qui ont une pièce retournée (C, D, ou E)

**Attribution des points**

- 4 Réponse complète (les cinq dispositions trouvées, dessinées, avec l'indication des modèles)
- 3 Réponse avec un oubli (une des solutions non trouvée) ou une « erreur » qui peut être un retournement de C, D ou E ; ou une répétition d'une même solution ; ou encore avec un dessin très confus ne permettant pas de reconnaître les modèles
- 2 Réponse avec deux oublis ou « erreurs »
- 1 Réponse avec trois ou quatre oublis ou erreurs
- 0 Incompréhension du problème

Degrés : 3, 4, 5**Origine : Sassari**

6. NOMBRES REPETES (I) (Cat. 4, 5)

Dans la table de multiplication « des nombres qui parlent », le 36 et le 40 ont déjà trouvé leurs places.

Le nombre 40 dit au nombre 36 : *Tu n'es que trois fois dans la table de multiplication des nombres de 1 à 10. Moi, j'y suis quatre fois et je vaux 4 de plus que toi.*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4									36	40
5								40		
6						36				
7										
8					40					
9				36						
10				40						

Quels sont les nombres qui pourront dire la même phrase à un autre lorsque la table sera complétée ?

Indiquez tous les nombres qui sont quatre fois dans la table et qui valent 4 de plus qu'un nombre qui n'y est que trois fois.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le tableau est fait pour contenir les produits de 1×1 à 10×10 et qu'il s'agit de la « table de multiplication » sous une forme différente de l'inventaire des « produits à mémoriser » (livrets, ...)
- Lire les consignes et les confronter aux exemples donnés en tenant compte des trois exigences : figurer quatre fois, valoir 4 de plus que l'autre nombre, qui doit figurer 3 fois.
- S'apercevoir que la table est symétrique par rapport à sa diagonale principale, c'est-à-dire que deux cases symétriques contiennent le même nombre (en raison de la commutativité de l'opération) et que les cases sur la diagonale sont symétriques d'elles-mêmes, ce qui signifie que les nombres qui s'y trouvent apparaissent un nombre impair de fois et limite ainsi la recherche aux dix nombres 1, 4, 9, ... 100, dont quatre seulement figurent trois fois : 4, 9, 16, 36.
- Examiner ensuite les quatre nombres qui valent 4 de plus : 8, 13, 20 et 40 et constater que, trois seulement sont quatre fois dans la table : 8, 20 et 40.

Ou : partir des nombres qui figurent quatre fois dans la table : 6, 10, 12, 18, 20, 24, 30 et 40 et vérifier si les nombres qui valent 4 de moins y figurent trois fois.

Ou : compléter entièrement la table et vérifier cas par cas si les trois conditions sont remplies.

Attribution des points

- 4 Réponse complète, (les nombres 8, 20 et 40) avec explications ou emplacements des nombres concernés dans la table : 8 et 4, 20 et 16, et faisant comprendre qu'il n'y a que ceux-là.
- 3 Réponse complète, sans explications
- 2 Réponse incomplète, (un seul des deux nombres 8 et 20) avec explication ou les deux nombres et un « intrus » (un autre nombre ne respectant que deux des trois conditions)

- 1 Réponse incomplète (un seul des deux nombres 8 et 20) sans explication
ou réponse avec un seul nombre correct et un ou plusieurs intrus ou les deux nombres avec plusieurs intrus
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 4, 5

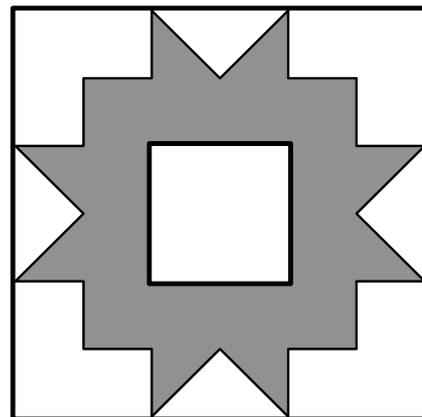
Origine : C.I

7. LA ROSACE DE JULIE (II) (Cat. 5, 6)

Julie veut repeindre le cadre de ce miroir en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de peinture blanche ou plus de peinture grise. Bien sûr, le miroir (le carré au centre) ne doit pas être repeint et la couche de peinture aura partout la même épaisseur.

Devra-t-elle utiliser plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



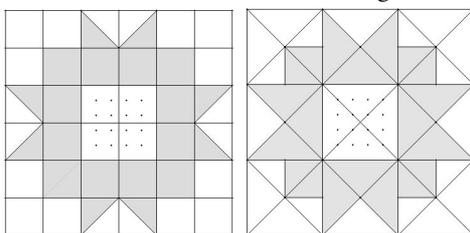
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

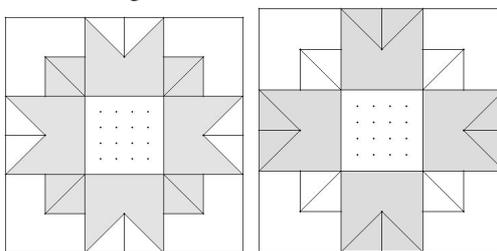
- Géométrie : décomposition-recomposition de formes
- Grandeurs : unité de mesure commune

Analyse de la tâche

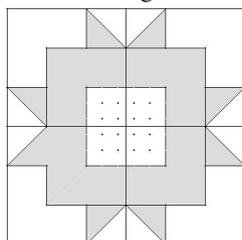
- Comprendre que le carré du milieu n'intervient pas dans la comparaison des aires.
- Comprendre que la surface blanche à couvrir peut être décomposée en plusieurs surfaces.
- Comprendre qu'il est possible de comparer des aires sans les mesurer ou les calculer avec des unités conventionnelles.
- Voir des décompositions possibles de chaque figure en ajoutant des traits dans le carré : déterminer l'unité de mesure commune (un carré ou un triangle) ; compter le nombre de carrés (16) ou de triangles (16) dans chacune des deux parties à colorier ; comparer ces deux nombres et reconnaître l'égalité des aires à couvrir.



- Voir qu'il est possible d'ajouter des lignes dans la partie grisée pour obtenir des carrés ; réaliser l'appariement géométrique entre ces quatre carrés et les quatre triangles clairs ; huit plus grands carrés à colorier apparaissent alors, quatre blancs, quatre gris ; constater l'égalité des aires.



- Tracer les médianes du grand carré ; prolonger les lignes intérieures pour faire apparaître des formes identiques aux quatre formes claires de coin ; réaliser des appariements géométriques entre ces formes et réaliser des appariements entre les triangles blancs et les triangles gris ; constater l'égalité des aires.



Attribution des points

- 4 Solution complète (égalité des aires, autant de peinture grise que de blanche, ...) avec explications correctes, par exemple avec le dessin des décompositions prises en compte
- 3 Solution correcte, avec explications incomplètes ou dessin peu clair
- 2 Solution correcte sans explication
ou erreur de comptage mais explication correcte
ou prise en compte du miroir avec réponse cohérente « plus de blanc » et explications correctes
- 1 Début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou réponse « autant de blanc que de gris » fondée sur un comptage qui ne tient pas compte de la grandeur des pièces.

Niveau : 5, 6

Origine : Belgique

8. LES CRAYONS DU 15^E RMT (Cat. 5, 6)

Les organisateurs ont décidé d'offrir un crayon à tous les participants du 15^e RMT.

À la fabrique de crayons, un employé est chargé de mettre le logo « 15^e RMT, 2007 » sur chaque crayon.

Avec 10 crayons, il remplit des boîtes sur lesquelles il met aussi le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Lorsqu'il a rempli dix boîtes, il en fait un paquet, sur lequel il marque de nouveau le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Finalement, avec 10 paquets, il remplit un carton sur lequel il marque encore le logo « 15^e RMT, 2007 ».

Aujourd'hui, l'employé a préparé les crayons commandés par la section de Transalpie. Il a compté que, pour cette section, il a dû mettre 2007 logos « 15^e RMT, 2007 ».

Combien de crayons la section de Transalpie a-t-elle commandés ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Lire l'énoncé et comprendre qu'on se trouve dans une situation de numération décimale : une boîte représente une dizaine, un paquet représente une centaine et un carton un millier.
- Comprendre que le nombre de logos est supérieur au nombre de crayons car ils sont mis aussi sur les boîtes, les paquets et les cartons et trouver les correspondances suivantes :
pour 10 crayons (une dizaine) il y a 11 logos, avec celui de la boîte
pour 100 crayons (une centaine), il y a 111 logos, avec celui du paquet
pour 1000 crayons (un millier), il faut 1111 logos, avec celui du carton.
- Comprendre que, deux cartons exigeraient 2222 logos et que, par conséquent, il n'y a pas deux cartons entiers pour 2007 logos, mais un carton entier et un reste de $2007 - 1111 = 896$ logos.
- Déterminer le nombre de paquets (111) dans 896 et arriver à 8 paquets et $896 - 888 = 8$ logos restants.
- En conclure que la section de Transalpie a commandé l'équivalent de 1 carton, 8 paquets et 8 crayons, c'est à-dire 1808 crayons.

Ou : procéder par essais et approximations en considérant qu'il y a moins de 2007 crayons (logos pour les boîtes, paquets, cartons) Supposer par exemple qu'il y en a 1800, alors il faut : $1800 + 180 + 18 + 1 = 1999$ logos, ce qui ne suffit pas. Essayer alors avec, par exemple, 1810 : $1810 + 181 + 18 + 1 = 2010$, et réduire le nombre de crayons pour trouver finalement qu'il y en a 1808 : $1808 + 180 + 18 + 1 = 2007$.

Attribution des points

- 4 Réponse « 1808 » avec justifications
- 3 Réponse « 1808 » sans explications
- 2 Réponse avec un oubli : logos sur les cartons qui amène à 1809 crayons, ou sur les paquets – 1824 crayons) ou réponse erronée due à une faute de calcul, avec raisonnement correct
- 1 Réponse avec deux oublis : logos sur les paquets et le carton qui amène à 1825 crayons ou début de recherche cohérente
- 0 Réponse « 2007 » ou incompréhension du problème

Niveau : 5, 6

Origine : C.I.

10. MACHINE A CALCULER 😊 (Cat. 5, 6, 7)

Sophie possède une sorte de machine à calculer munie d'une touche 😊.

Quand Sophie tape $\boxed{5}$ puis 😊, sa machine affiche : $\boxed{25}$

Quand Sophie tape $\boxed{7}$ puis 😊, sa machine affiche : $\boxed{31}$

Quand Sophie tape $\boxed{10}$ puis 😊, sa machine affiche : $\boxed{40}$

Quand Sophie tape 9 puis 😊, que pourrait afficher sa machine ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les opérations, calcul réfléchi
- Approche intuitive de la notion de fonction

Analyse de la tâche

- Comprendre que la touche « smile » fait correspondre une « image » à tout nombre que l'on « entre » dans la machine.
- Constaté que, à l'entrée, de 5 à 7 on augmente de 2 alors que, à la sortie l'augmentation de 25 à 31 est de 6. Faire l'hypothèse que chaque fois qu'on augment de 1 le nombre de l'entrée, la machine augmente de 3 le nombre affiché. L'image de 9 serait alors 37 et l'hypothèse serait vérifiée par l'image de 10 qui est 40.

Ou : procéder par un tableau de nombre à compléter et y chercher des régularités, en particulier celle évoquée précédemment.

entrées :	5	6	7	8	9	10
images	25		31			40

Dans ce cas, il suffit de compléter la suite arithmétique 25 ; 28 ; 31 ; 34 ; 37 ; 40 (en vérifiant le 31 au passage et en déterminant le 37 comme image de 9).

Ou : d'un point de vue « fonctionnel », chercher des relations directes entre l'entrée et la sortie : envisager une multiplication, ou une addition, ou une élévation au carré et se rendre compte qu'il faut orienter ses recherches vers une composition de deux « fonctions simples », par exemple d'une multiplication et d'une addition.

La multiplication par 4, suggérée par la correspondance $10 \rightarrow 40$ montre qu'il faudrait de « petites corrections » pour 5 ($4 \times 5 + 5 = 25$) et 7 ($4 \times 7 + 3 = 31$). Une multiplication par 3 fait correspondre 3, 7 et 10 à 15, 21 et 30 qui valent 10 de moins que les images respectives issues de la machine. La « machine à multiplier par 3 puis ajouter 10 » (fonction affine $x \rightarrow 3x + 10$) est donc une hypothèse à accepter pour les trois couples donnés. Il en existe une infinité d'autres d'un point de vue mathématique, mais celle-ci paraît la plus disponible pour des élèves de l'école primaire.

- L'hypothèse étant acceptée, il suffit de calculer l'image de 9 par la « machine à multiplier par 3 et ajouter 10 », c'est-à-dire $3 \times 9 + 10 = 37$

Ou, pour les élèves qui ont déjà rencontré des représentations graphiques, utiliser le fait que les trois couples (5 ; 25), (7 ; 31) et (10 ; 40) sont représentés par des points alignés.

Attribution des points

- 4 Réponse exacte (37) avec explicitation de la règle trouvée et vérification sur les trois exemples donnés
- 3 Réponse exacte avec explications incomplètes (par exemple sans les vérifications des trois exemples donnés)
- 2 Réponse exacte sans aucune explication
ou émission d'une hypothèse, confrontation avec les autres valeurs numériques mais sans calculer l'image de 9
- 1 Résultats comme 45 ou 36 ; avec une conjecture émise, explicitée mais non pas vérifiée pour les autres nombres donnés, et appliquée directement au nombre « 9 »
- 0 incompréhension du problème, absence de résultat

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Châteauroux

11. LE CHAMP AGRANDI (Cat. 5, 6, 7)

Le père Julien possède un champ carré entouré d'une clôture. Son voisin accepte de lui vendre un peu de terrain pour l'agrandir en un carré ayant des côtés d'un mètre de plus. La surface de son champ augmente ainsi de 41 m^2 .

Quelle était la longueur des côtés de son ancien champ ?

Maintenant que le terrain est plus grand, la clôture précédente n'est plus suffisante : combien de mètres de clôture manquent-ils ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

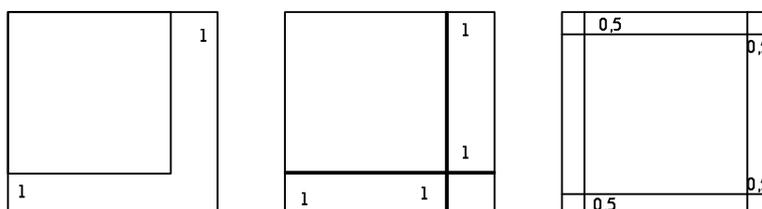
Domaine de connaissances

- Géométrie : périmètre et aire d'un carré, aire du rectangle
- Arithmétique (addition, multiplication)

1

Analyse de la tâche

- Représenter la situation par un croquis de ce genre :



- Constaté que la clôture doit être allongée de 4 fois 1 mètre

Ou : se rappeler que le périmètre d'un carré vaut 4 fois la longueur d'un côté. Et si le côté augmente de 1 mètre, le périmètre va augmenter de 4 mètres.

- Décomposer la partie gagnée en deux rectangles et un petit carré d'un mètre de côté.

Les deux rectangles ont pour aire ensemble $41 - 1 = 40 \text{ m}^2$.

Ayant même longueur (le côté de l'ancien champ) et même largeur (1 m), ils ont même aire.

Chacun fait donc 20 m^2 .

Les côtés de l'ancien champ mesuraient donc 20 m.

Ou : dresser un inventaire organisé en faisant varier le côté, pour déterminer la solution correspondante :

mesure ancien côté (en m)	16	...	20	...	21
mesure nouveau côté (en m)	17	...	21	...	22
différence des aires (en m^2)	$289 - 256 = 33$...	$441 - 400 = 41$...	$484 - 441 = 43$

et s'apercevoir que les différences des deux carrés augmentent de 2 en 2, et qu'il n'y a qu'une solution à retenir.

Attribution des points

- 4 Solution correcte : (20 m et 4m), avec explications
- 3 Solution correcte, (20 m et 4m) avec explications incomplètes
- 2 Solution correcte (20 m et 4m) sans aucune explication ni justification
ou solution avec une erreur de calcul, mais avec explications
ou réponse correcte à la première question et réponse 24 m ($1+20+1+1+20+1$) à la deuxième
- 1 Début de recherche cohérente, réponse juste à une des deux questions
- 0 Incompréhension du problème ou réponses entièrement fausses

Niveau : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté