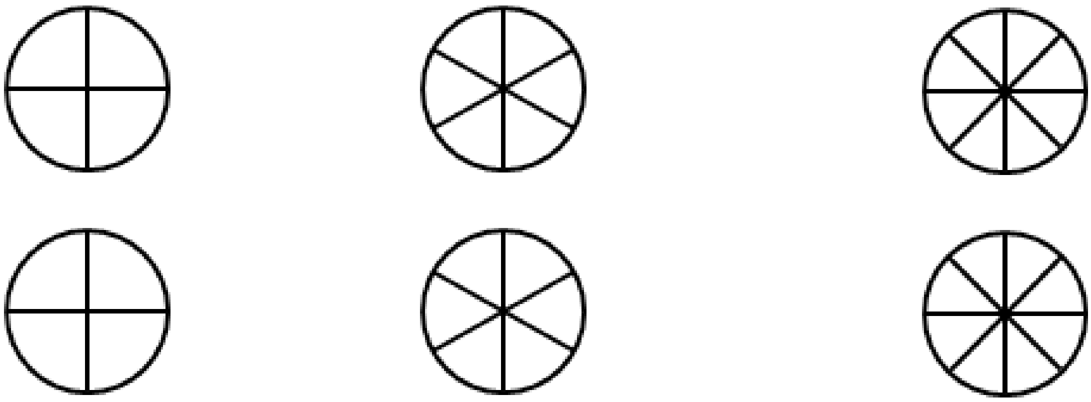
23ème Rallye Mathématique Transalpin
Epreuve d'essai
Section de Bourg en Bresse

Vous trouverez ci-dessous une épreuve d'essai possible pour les classes de catégorie 8 (classes de 4ème des collèges), pour la participation au 23ème Rallye Mathématique Transalpin.

10. LES PARTS DE TARTES (Cat. 6, 7, 8)

Huit amis ont commandé six tartes pour le goûter. Le pâtissier a livré deux tartes aux fraises, deux tartes aux pommes et deux tartes aux kiwis. Toutes les tartes ont la même taille, mais les tartes aux fraises sont déjà coupées en quatre, les tartes aux pommes sont coupées en six et les tartes aux kiwis sont coupées en huit.

Ils se mettent d'accord pour que chacun mange la même quantité de tarte, sans avoir à couper d'autres parts. Chacun veut aussi avoir deux sortes de tartes. Comme les amis sont très gourmands, ils vont tout manger.



tartes aux fraises tartes aux pommes tartes aux kiwis

Comment les huit amis peuvent-ils se répartir les parts de tartes ?

Donnez toutes les possibilités que vous avez obtenues et expliquez votre raisonnement.

11. PAS SI SIMPLE… (Cat. 6, 7, 8)

Le professeur de mathématiques propose une devinette à la classe :
En utilisant trois fois le nombre 5 et une fois le nombre 1 vous devez obtenir 24 par des additions, soustractions, multiplications ou divisions.

Par exemple :

$(5 + 1) \times (5 - 1) = 24$ ne convient pas car il n'y a que deux nombres 5 et deux nombres 1,
$(5 \times 5) - 1^5 = 24$ ne convient pas non plus car 1^5 n'est pas une des opérations autorisées.
Mais je peux vous assurer qu'il y a une solution.

Quelle est la solution à la devinette proposée par le professeur ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

12. QUITTE OU TRIPLE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pour sa fête d'anniversaire, Louise a organisé un jeu de questions et réponses, « Quitte ou triple » où, à chaque partie, les joueurs misent un certain nombre de jetons et répondent à une question.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si le joueur donne une réponse juste à la question, il gagne et reçoit le triple du nombre de jetons qu'il a misés.
- Si le joueur donne une réponse fausse, il perd tous les jetons qu'il a misés.

Paul décide de jouer ainsi à « Quitte ou triple » :

Il misera tous ses jetons et, s'il gagne, il en donnera à chaque fois 12 à son petit frère Pierre pour constituer une réserve, puis il jouera à nouveau avec tous les jetons qui lui restent.

Paul joue et gagne ses trois premières parties. Après sa troisième partie, il a donné en tout 36 jetons à Pierre et il lui en reste 87 pour la quatrième partie.

Combien de jetons Paul avait-il avant de commencer à jouer à « Quitte ou triple » ?

Expliquez votre raisonnement

13. L'ÂNE CADICHON (Cat. 7, 8, 9, 10)

Bertrand utilise son âne Cadichon pour transporter les pommes de son verger au magasin en ville où elles seront vendues. Le magasin est distant de 30 km du verger et Bertrand a produit 90 kg de pommes.

Cadichon est capable de transporter 30 kg de pommes à la fois, mais pour chaque kilomètre parcouru en portant des pommes, il en mange 1 kg. Il ne mange rien s'il n'est pas chargé.

Bertrand a compris que si Cadichon fait les 30 km d'une seule traite, en partant avec 30 kg au départ, il mangera toutes les pommes et n'aura plus rien sur le dos lorsqu'il arrivera au magasin.

Il décide alors de faire des dépôts entre le verger et le magasin.

Par exemple, si lors d'un premier voyage il dépose 15 kg à mi-parcours, il peut faire un deuxième voyage avec 30 kg au départ, puis arrivé à mi-parcours, charger les 15 kg du dépôt et arriver avec 15 kg au magasin. Il restera alors encore 30 kg dans le verger.

Mais Bertrand peut livrer davantage de pommes au magasin en organisant mieux ses dépôts.

Combien de kg au maximum Bertrand pourra-t-il arriver à livrer au magasin ?

Expliquez votre raisonnement.

14. LES ACCROS DU BOULOT (Cat. 7, 8, 9, 10)

En consultant son agenda, Laurent a constaté que 2014 est une année à 52 dimanches, comme l'était déjà 2013 et comme le sera 2015. Il se lamente et demande : *Mais quand y aura-t-il une année à 53 dimanches ?*

Son ami Jean-Marc lui dit :

Il ne faudra pas attendre très longtemps pour avoir une année à 53 dimanches, mais moi je préfère les années avec 53 week-ends entiers (samedi et dimanche) !

Quelle sera la prochaine année avec 53 dimanches et quelle sera la prochaine année avec 53 week-ends entiers ?

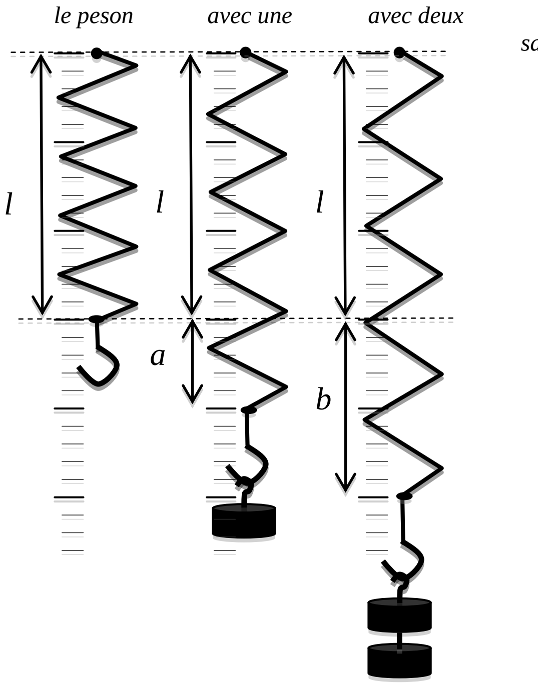
Expliquez votre raisonnement.

15. PESON À RESSORT (Cat. 8, 9, 10)

Un peson à ressort est un appareil de mesure constitué d'un ressort muni d'un crochet à une extrémité et fixé par l'autre extrémité à un support. Lorsqu'on accroche des charges au crochet, le ressort s'allonge.

L'allongement du ressort est proportionnel au poids de l'objet suspendu.

Sur le schéma ci-contre le même peson est représenté d'abord sans charge, de longueur *l*, puis avec une charge où il s'est allongé de *a* puis avec deux charges où il s'est allongé de *b* qui est le double de *a*.



Le ressort d'un peson A, sans charge, a une longueur de 10 cm. Quand on lui suspend un objet de 3 kg, sa longueur devient 16 cm.

Le ressort d'un autre peson B, sans charge, a une longueur de 5 cm. Quand on lui suspend un objet de 2 kg, sa longueur devient 11 cm.

Trouvez la masse d'un objet tel que la longueur des ressorts des deux pesons A et B soit la même, qu'il soit suspendu soit à l'un soit à l'autre.

Quelle longueur les deux ressorts des pesons auront-ils avec la masse de cet objet ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

16. UNE NOUVELLE VOITURE (Cat. 8, 9, 10)

La nouvelle voiture RMT22 a été mise en vente au même prix dans tous les pays du monde.
Un riche Américain décide d'en acquérir trois, qu'il offrira à ses trois neveux qui vivent dans des pays différents.
Il achète la première pour son neveu qui vit Italie où, en plus du prix de base, il paye la TVA à 21 %.
Il achète la deuxième pour son neveu qui habite en France où la TVA est, en revanche, de 20 %. Pour ces deux premières voitures, il paye un total de 22 413 €,
Il achète la troisième pour son neveu qui vit en Transalpie, qu'il paye seulement 10 044 €, avec la TVA incluse.

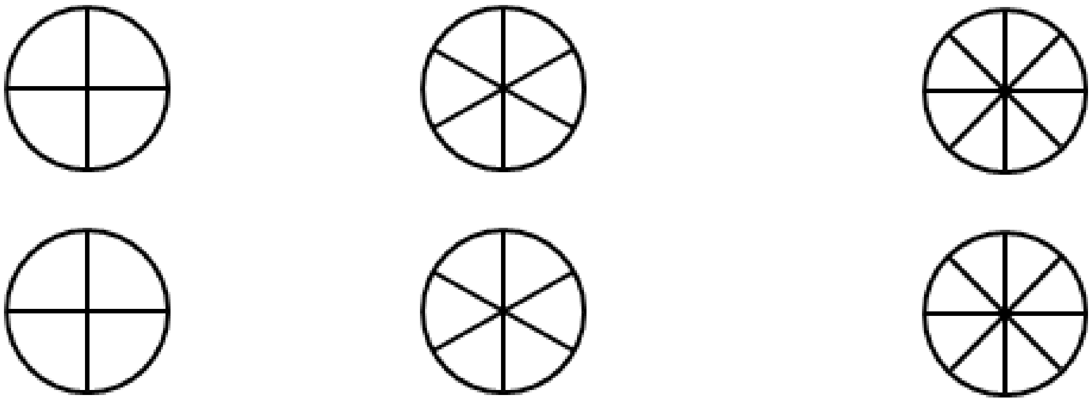
Quel est le pourcentage de la TVA en Transalpie ?

Expliquez votre raisonnement.

10. LES PARTS DE TARTES (Cat. 6, 7, 8)

Huit amis ont commandé six tartes pour le goûter. Le pâtissier a livré deux tartes aux fraises, deux tartes aux pommes et deux tartes aux kiwis. Toutes les tartes ont la même taille, mais les tartes aux fraises sont déjà coupées en quatre, les tartes aux pommes sont coupées en six et les tartes aux kiwis sont coupées en huit.

Ils se mettent d'accord pour que chacun mange la même quantité de tarte, sans avoir à couper d'autres parts. Chacun veut aussi avoir deux sortes de tartes. Comme les amis sont très gourmands, ils vont tout manger.



tartes aux fraises tartes aux pommes tartes aux kiwis

Comment les huit amis peuvent-ils se répartir les parts de tartes ?

Donnez toutes les possibilités que vous avez obtenues et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les manières de répartir 8 quarts, 12 sixièmes et 16 huitièmes en 8 parts équivalentes, chacune constituée de deux types de fractions.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut répartir les tartes en 8 portions égales en prenant, pour chaque portion, des parts dans deux tartes.
- Raisonnement utilisant le calcul sur les fractions :
- Les 6 tartes étant entièrement consommées, chacun aura mangé 6/8 de tarte.
- Il faut donc obtenir 6/8 en additionnant soit des quarts et des sixièmes, soit des quarts et des huitièmes, soit des sixièmes et des huitièmes.
- Le raisonnement le plus simple consiste à chercher à compléter une ou plusieurs parts de chaque tarte pour obtenir des portions de 6/8 (ou de 3/4) de tarte.
  - Compléter 1/4 (égal à 2/8) par 4/8 (ou 1/2). On peut avoir alors : 1/4 + 3 × 1/6 ou 1/4 + 4 × 1/8.
  - Compléter 2 × 1/4 (égal à 1/2 ou 4/8) par 2 × 1/8. Donc 2 × 1/4 + 2 × 1/8.
  - Compléter 1/6 ou 2/6 par des huitièmes pour avoir 6/8 n'est pas possible.
  - Compléter 3/6 (égal à 1/2) par des huitièmes est possible : 3 x 1/6 + 2 x 1/8.
- On peut donc obtenir 6/8 de tarte de quatre manières différentes en tenant compte que chacun ne prend que deux sortes de tartes :

	Tarte aux fraises	Tarte aux pommes	Tarte aux kiwis
Portion A	1/4	1/6 + 1/6 + 1/6	
Portion B	1/4		1/8 + 1/8 + 1/8 + 1/8
Portion C	1/4 + 1/4		1/8 + 1/8
Portion D		1/6 + 1/6 + 1/6	1/8 + 1/8

- Les 5 répartitions possibles entre les 8 enfants résultent des combinaisons de ces 4 portions :
  répartition 1 : 4 personnes avec A ; 4 personnes avec B
  répartition 2 : 3 personnes avec A ; 3 personnes avec B ; 1 personne avec C ; 1 personne avec D
  répartition 3 : 2 personnes avec C ; 2 personnes avec B ; 2 personnes avec A ; 2 personnes avec D

répartition 4 : 1 personne avec A ; 1 personne avec B ; 3 personnes avec C ; 3 personnes avec D

répartition 5 : 4 personnes avec C ; 4 personnes avec D

Ou : procéder par essais plus ou moins organisés, à partir d'un découpage de toutes les parts de tartes. Cette stratégie peut permettre de trouver une ou deux répartitions, mais sans doute pas les cinq possibles.

Attribution des points

4 Au moins trois répartitions exactes avec explications correcte et aucune répartition fausse

3 Au moins trois répartitions exactes sans répartition fausse, sans explications ou avec explications partielles
ou deux répartitions exactes avec explications et sans répartition fausse

2 Au moins deux répartitions exactes (sans explications) et au plus une solution fausse
ou au moins trois répartitions exactes (sans explications) et au plus deux répartitions fausses

1 Une seule répartition exacte avec éventuellement d'autres solutions fausses

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

11. PAS SI SIMPLE… (Cat. 6, 7, 8)

Le professeur de mathématiques propose une devinette à la classe :
En utilisant trois fois le nombre 5 et une fois le nombre 1 vous devez obtenir 24 par des additions, soustractions, multiplications ou divisions.

Par exemple :

(5 + 1) × (5 – 1) = 24 ne convient pas car il n'y a que deux nombres 5 et deux nombres 1,
(5 × 5) - 1^5 = 24 ne convient pas non plus car 1^5 n'est pas une des opérations autorisées.
Mais je peux vous assurer qu'il y a une solution.

Quelle est la solution à la devinette proposée par le professeur ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Obtenir 24 à partir des quatre nombres 5, 5, 5 et 1 par des opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication et division.

Analyse de la tâche

- Effectuer des essais en utilisant éventuellement une calculatrice et se convaincre qu'il n'y a pas de solution en restant dans l'ensemble des entiers naturels.
- Essayer en partant de 24 d'ajouter, de soustraire ou de diviser par 5 et raisonner sur les nombres obtenus en utilisant encore deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 1.

Ou : prendre conscience que la seule manière d'obtenir un nombre décimal avec une seule opération à partir des nombres 5 et 1 est de diviser 1 par 5, ce qui donne 0,2.

Continuer en essayant d'obtenir 24 à partir de 0,2 en utilisant deux fois le nombre 5. Trouver que la seule façon d'y parvenir est d'effectuer (5 – 0,2) × 5 = 4,8 × 5 = 24

Attribution des points

4 L'expression correcte, (5 – 1/5) × 5 avec explications sur la procédure de recherche
3 L'expression correcte sans explications
2 La bonne succession d'opérations mais avec une expression incorrecte (par exemple 5 – 1/5 × 5)
1 Une explication convaincante du fait qu'il n'y a pas de solution avec des entiers
ou une présentation d'éléments montrant une compréhension du problème
0 Incompréhension du problème ou essais incorrects (ne respectant pas les contraintes)

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

12. QUITTE OU TRIPLE (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pour sa fête d'anniversaire, Louise a organisé un jeu de questions et réponses, « Quitte ou triple » où, à chaque partie, les joueurs misent un certain nombre de jetons et répondent à une question.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si le joueur donne une réponse juste à la question, il gagne et reçoit le triple du nombre de jetons qu'il a misés.
- Si le joueur donne une réponse fausse, il perd tous les jetons qu'il a misés.

Paul décide de jouer ainsi à « Quitte ou triple » :

Il misera tous ses jetons et, s'il gagne, il en donnera à chaque fois 12 à son petit frère Pierre pour constituer une réserve, puis il jouera à nouveau avec tous les jetons qui lui restent.

Paul joue et gagne ses trois premières parties. Après sa troisième partie, il a donné en tout 36 jetons à Pierre et il lui en reste 87 pour la quatrième partie.

Combien de jetons Paul avait-il avant de commencer à jouer à « Quitte ou triple » ?

Expliquez votre raisonnement

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre qui, transformé trois fois de suite par la fonction « multiplier par 3 puis soustraire 12 », donne 87.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a une différence entre le nombre de jetons mis en jeu et ceux qui ont été gagnés.
- Démarche arithmétique :

  Se rendre compte qu'avant de jouer sa deuxième et troisième partie, Paul a 12 jetons de moins que ceux qu'il a gagnés à la partie précédente. Il est alors préférable de raisonner à partir du nombre final de jetons (87).

  En procédant par un raisonnement à rebours, on peut en déduire le gain de Paul à la troisième partie. Ce gain s'élève à 87 + 12 = 99 jetons. Il avait donc 99 : 3 = 33 jetons avant la troisième partie.

  De cela, on peut déduire le nombre de jetons que Paul avait après la deuxième partie, à savoir 33 + 12 = 45.

  Donc, avant de jouer sa deuxième partie, il avait 45 : 3 = 15 jetons.

  Vu qu'il a aussi donné 12 jetons à son frère après la première partie, il devait en avoir 15 + 12 = 27 à l'issue de celle-ci. C'est ainsi qu'on peut affirmer qu'il avait 27 : 3 = 9 jetons avant de commencer la première partie.
- Démarche algébrique:

  Soit x le nombre de jetons que Paul avait avant de jouer la première partie.

  Après la première partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait $3x – 12$ jetons.

  Après la deuxième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait $3(3x – 12) – 12$ jetons.

  Après la troisième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul a $3[3(3x – 12) – 12] – 12$ jetons.

  Il faut donc résoudre l'équation : $3[3(3x – 12) – 12] – 12 = 87$. On trouve $x = 9$.
- Par tâtonnements :

  Émettre une hypothèse sur le nombre initial de jetons que possédait Paul.

Ou : le nombre de jetons gagnés après la première partie est à choisir parmi les multiples de 3 supérieurs à 12, puisqu'à ce nombre il faudra ensuite soustraire 12, ce qui nous laisse 15, 18, 21, 27, 30, … comme possibilités. Le nombre 27 donne la bonne réponse.

Attributions des points

4 Réponse correcte (9 jetons) avec explications claires et calculs détaillés

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes ou bien seulement une vérification

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse fausse due à une erreur de calcul, mais avec explication

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9

Origine : Lodi

13. L'ÂNE CADICHON (Cat. 7, 8, 9, 10)

Bertrand utilise son âne Cadichon pour transporter les pommes de son verger au magasin en ville où elles seront vendues. Le magasin est distant de 30 km du verger et Bertrand a produit 90 kg de pommes.

Cadichon est capable de transporter 30 kg de pommes à la fois, mais pour chaque kilomètre parcouru en portant des pommes, il en mange 1 kg. Il ne mange rien s'il n'est pas chargé.

Bertrand a compris que si Cadichon fait les 30 km d'une seule traite, en partant avec 30 kg au départ, il mangera toutes les pommes et n'aura plus rien sur le dos lorsqu'il arrivera au magasin.

Il décide alors de faire des dépôts entre le verger et le magasin.

Par exemple, si lors d'un premier voyage il dépose 15 kg à mi-parcours, il peut faire un deuxième voyage avec 30 kg au départ, puis arrivé à mi-parcours, charger les 15 kg du dépôt et arriver avec 15 kg au magasin. Il restera alors encore 30 kg dans le verger.

Mais Bertrand peut livrer davantage de pommes au magasin en organisant mieux ses dépôts.

Combien de kg au maximum Bertrand pourra-t-il arriver à livrer au magasin ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Optimisation d'un transport de 90 kg sur une distance de 30 km avec un transporteur de charge maximale un 30 kg consommant 1 kg par km.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et comprendre pourquoi, si Cadichon fait des voyages de 30 km d'une seule traite, il mangera toutes les pommes.
- Comprendre qu'en organisant des dépôts, il est possible de livrer des pommes au magasin. Comprendre l'exemple décrit dans l'énoncé. Faire des essais comme dans cet exemple avec plusieurs dépôts, par exemple un dépôt tous les 10 km :

	départ	10 km	1er dépôt		10 km	2ème dépôt		10 km	arrivée
1er trajet :	30 kg	⟶	20 kg						
2ème trajet :	30 kg	⟶	20 kg	4ème : 30 kg	⟶	20 kg	6ème : 20 kg	⟶	10 kg
3ème trajet :	30 kg	⟶	20 kg	5ème : 30 kg	⟶	20 kg	7ème : 20 kg	⟶	10 kg

  Dans cet exemple, Bertrand livre 20 kg de pommes.
- Pour une étude plus systématique, comprendre que le poids des pommes mangées par Cadichon ne dépend pas de la charge qu'il porte, mais seulement de la distance parcourue. En déduire qu'il vaut mieux que Cadichon voyage en pleine charge de 30 kg et minimiser le nombre de ses trajets.
- Raisonner « à l'envers » : Cadichon doit franchir la distance x entre le dernier dépôt et le magasin en une seule fois et en emportant 30 kg de pommes, il en livre $30 - x$.
- Comme il ne peut déposer 30 kg de pommes dans ce dernier dépôt en une seule fois, il devra parcourir la distance entre l'avant dernier dépôt et le dernier en au moins deux fois, partant à chaque fois avec au plus 30 kg de pommes. Pendant ces deux trajets, Cadichon mangera donc la moitié de ces 60 kg de pommes, soit 15 kg à chaque voyage. La distance entre ces deux dépôts est donc au mieux de 15 km.
- Pour déposer 60 kg de pommes, Cadichon doit faire au moins 3 voyages. Au mieux, il en fera exactement 3. Or il a 90 kg de pommes à transporter au départ. Il peut effectivement le faire en 3 voyages de 30 kg chacun. Pour livrer 60 kg de pommes, il peut manger 30 kg de ces 90 kg en trois fois, soit 10 kg par voyage. La distance séparant le verger du premier dépôt est donc au mieux de 10 km.
- Il reste donc $x = 5$ km séparant le deuxième dépôt du magasin et Bertrand va pouvoir livrer $30 - 5 = 25$ kg de pommes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (25 kg de pommes, avec des dépôts à 10 km et 25 km du verger) avec les positions de dépôts et explications claires des trajets

3 Réponse 20 kg de pommes avec un exemple et des explications incomplètes et peu claires
ou réponse correcte 25 kg avec explications incomplètes

2 Réponse 20 kg de pommes sans explications
ou un autre nombre supérieur à 15 et inférieur à 20, avec un raisonnement cohérent, conscient de la nécessité de faire des dépôts pour livrer des pommes

1 Début de raisonnement correct montrant l'impossibilité de livrer des pommes par des trajets de 30 km d'une seule traite

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : littérature traditionnelle, interprétation : Riva del Garda

14. LES ACCROS DU BOULOT (Cat. 7, 8, 9, 10)

En consultant son agenda, Laurent a constaté que 2014 est une année à 52 dimanches, comme l'était déjà 2013 et comme le sera 2015. Il se lamente et demande : *Mais quand y aura-t-il une année à 53 dimanches ?*
Son ami Jean-Marc lui dit :
Il ne faudra pas attendre très longtemps pour avoir une année à 53 dimanches, mais moi je préfère les années avec 53 week-ends entiers (samedi et dimanche) !

Quelle sera la prochaine année avec 53 dimanches et quelle sera la prochaine année avec 53 week-ends entiers ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les régularités des années qui ont 53 dimanches et celles qui ont 53 week-ends.

Analyse de la tâche

- Partir du constat qu'une année non bissextile a 365 jours alors qu'une année bissextile en a 366.
- Déterminer le nombre de semaines entières et de jours restants en divisant le nombre de jours de l'année par le nombre de jours d'une semaine et trouver : $365= 52 \times 7 +1$ voire $366= 52 \times 7 +2$, ou parvenir à ce constat à l'aide d'un calendrier.
- En déduire qu'une année non bissextile aura six jours qui se répéteront 52 fois et un jour 53 fois, le 1 janvier et le 31 décembre. En 2014 c'est le mercredi (en consultant l'agenda), en 2015 le jeudi, en 2016 le vendredi et en 2017 le dimanche (car l'année précédente était bissextile et il y a un décalage de deux jours).
- Une année bissextile aura cinq jours qui se répéteront 52 fois et deux jours 53 fois. Pour avoir une année avec 53 weekends il faut donc chercher parmi les années bissextiles à venir, celles qui auront deux samedis et deux dimanches : en 2016, deux vendredis et deux samedis (1 et 2 janvier et 30 et 31 décembre), puis avec un décalage de cinq jours, 2020 deux mercredis et jeudis, 2024 deux lundis et mardis, 2028 deux samedis et deux dimanches, ou deux week-ends.

Ou : organiser les énumérations à partir des premiers et derniers jours de l'année, en respectant l'écart d'un jour d'une année à l'autre ou de deux jours après le 29 février des années bissextiles :

	1 janvier	2 janvier	30 décembre	31 décembre
2014	mercredi	jeudi	mardi	mercredi
2015	jeudi (+1)	vendredi (+1)	mercredi (+1)	jeudi (+1)
2016	vendredi (+1)	samedi (+1)	vendredi (+2)	samedi (+2)
2017	**dimanche** (+2)	lundi (+2)	samedi (+1)	dimanche (+1)
...				
2020	mercredi (+3)	jeudi (+3)	mercredi (+4)	jeudi (+4)
2024	lundi (+5)	mardi (+5)	lundi (+5)	mardi (+5)
2028	**samedi** (+5)	**dimanche** (+5)	**samedi** (+5)	**dimanche** (+5)

Attribution des points

4 Réponses correctes (2017 et 2028) avec explications complètes

3 Réponses correctes avec explications incomplètes
ou seulement la réponse 2028 avec explications complètes (avec oubli de la réponse 2017)

2 Réponses correctes sans explications
ou réponses incorrectes dues à une seule erreur (décalage inexact) mais avec explications complètes
ou seulement la réponse 2017 avec explications complètes

1 Début de raisonnement correct, par exemple la conclusion que l'année recherchée devra être une année bissextile

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8 ,9, 10

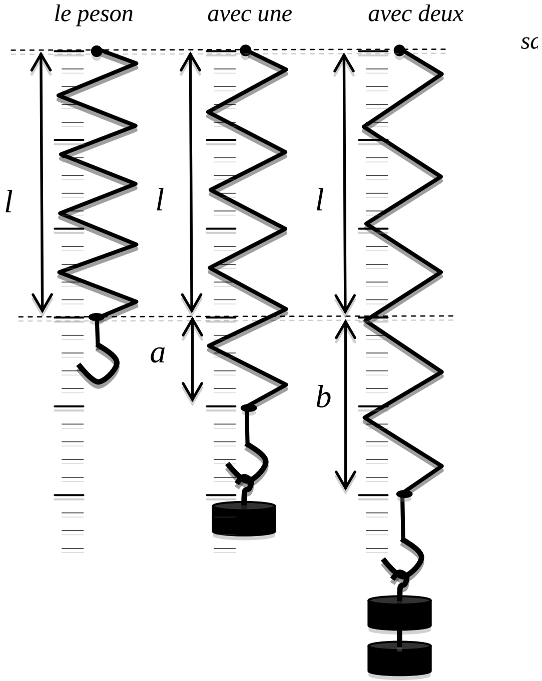
Origine : Luxembourg, la et fj

15. PESON À RESSORT (Cat. 8, 9, 10)

Un peson à ressort est un appareil de mesure constitué d'un ressort muni d'un crochet à une extrémité et fixé par l'autre extrémité à un support. Lorsqu'on accroche des charges au crochet, le ressort s'allonge.

L'allongement du ressort est proportionnel au poids de l'objet suspendu.

Sur le schéma ci-contre le même peson est représenté d'abord sans charge, de longueur *l*, puis avec une charge où il s'est allongé de *a* puis avec deux charges où il s'est allongé de *b* qui est le double de *a*.



Le ressort d'un peson A, sans charge, a une longueur de 10 cm. Quand on lui suspend un objet de 3 kg, sa longueur devient 16 cm.

Le ressort d'un autre peson B, sans charge, a une longueur de 5 cm. Quand on lui suspend un objet de 2 kg, sa longueur devient 11 cm.

Trouvez la masse d'un objet tel que la longueur des ressorts des deux pesons A et B soit la même, qu'il soit suspendu soit à l'un soit à l'autre.

Quelle longueur les deux ressorts des pesons auront-ils avec la masse de cet objet ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Dans un contexte de pesons à ressort, déterminer la force (le poids) pour lequel deux ressorts de longueurs initiales et « coefficients d'allongements » différents, auront la même longueur, sachant que les allongements sont proportionnels à la force.

Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement d'un peson : le ressort, ses caractéristiques mécaniques, sa longueur, son allongement et la relation de proportionnalité : allongement = force × « coefficient d'allongement», entre l'allongement du ressort et la masse qui lui est suspendue.
- Déterminer comment évolue la longueur de chaque peson selon le poids : longueur initiale + allongement ou longueur initiale + force × « coefficient ».
- Pour le peson A, l'allongement est de 16 – 10 = 6 (cm) pour 3 (kilogramme force), donc le coefficient est 2 (cm/kilogramme-force), alors que pour le peson B, on a : 11 - 5 = 6 (cm) pour 2 kg, donc le coefficient est 3 (cm/kilogramme-force).
- En déduire les longueurs des deux ressorts (en cm) en fonction d'un poids M (en kilogramme-force) : L = 10 + 2M pour le peson A, L = 5 + 3M pour le peson B.
- Pour trouver la masse qui permet d'atteindre la même longueur pour les deux ressorts, il y a plusieurs manières de procéder :
    - par algèbre : égaler les deux longueurs et obtenir l'équation en M : 10 + 2M = 5 + 3M puis en déduire que la masse M vaut 5 kg et que la longueur des ressorts A et B est alors 20 cm ;
    - graphiquement en représentant les deux fonctions affines par des droites (définies par deux points, (0, 10) et (3, 16) pour A et (0, 5) et (2, 11) pour B) dont l'intersection a pour coordonnées : L = 20 et M = 5 ;
    - par un tableau donnant les longueurs des ressorts en fonction des masses suspendues en utilisant la proportionnalité des allongements :

Masses (kg)	0	1	**2**	**3**	4	**5**	6	7	8
Allongement du ressort A (cm)	**0**	2	4	6	8	10	12	14	16
Longueur du ressort A (cm)	**10**	12	14	**16**	18	**20**	22	24	26
Allongement du ressort B (cm)	**0**	3	6	9	12	15	18	21	24
Longueur du ressort B (cm)	**5**	8	**11**	14	17	**20**	23	26	29

Observer que pour une masse de 5 kg, les deux ressorts mesurent 20 cm.

Attribution des points

4 Réponse correcte (5 kg et 20 cm) avec une explication claire

3 Réponse correcte avec une explication peu claire ou incomplète

2 Réponse correcte sans explication
ou absence de la deuxième valeur avec explication

1 Début de recherche avec un calcul correct des constantes de proportionnalité des deux ressorts
ou absence de la deuxième valeur sans explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

16. UNE NOUVELLE VOITURE (Cat. 8, 9, 10)

La nouvelle voiture RMT22 a été mise en vente au même prix dans tous les pays du monde.
Un riche Américain décide d'en acquérir trois, qu'il offrira à ses trois neveux qui vivent dans des pays différents.
Il achète la première pour son neveu qui vit Italie où, en plus du prix de base, il paye la TVA à 21 %.
Il achète la deuxième pour son neveu qui habite en France où la TVA est, en revanche, de 20 %.
Pour ces deux premières voitures, il paye un total de 22 413 €,
Il achète la troisième pour son neveu qui vit en Transalpie, qu'il paye seulement 10 044 €, avec la TVA incluse.

Quel est le pourcentage de la TVA en Transalpie ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Déterminer le prix de base d'une voiture hors TVA, égal dans les trois pays, à partir des informations relatives à son prix avec TVA en Italie et en France et en déduire le pourcentage de TVA en Transalpie.

Analyse de la tâche

- Procéder par essais à partir d'un coût de base plausible de la voiture (par exemple 10 000 €). L'application de 21% dans le premier cas et 20 % dans le second cas donne un total de 24 100 €.
- Constatant que le prix de base est inférieur, faire d'autres essais visant à réduire ce prix de 50 € en 50 € par exemple, puis finir par effectuer les calculs avec un prix de base de 9 300 €.
- En déduire que la TVA en Transalpie s'élève à 744 € et que cette valeur correspond à 8 % du coût de base de la voiture (744 / 9 300 = 0,08).

Ou bien, utiliser pour l'Italie et la France la valeur moyenne de 20,5 % de TVA, diviser le prix payé 22 413 € par 2 (prix moyen d'une voiture) et diviser par 1,205 pour obtenir son prix de base : 9300 €.

Ou bien, utiliser une équation de la forme $x + 0{,}21x + x + 0{,}20x = 22\ 413$ ou $1{,}21x + 1{,}20x = 22\ 413$ et en déduire que $x = 9300$ € est le prix d'une voiture,

puis pour trouver la TVA de Transalpie (y), résoudre l'équation $9300\ (1 + y) = 10\ 044$ d'où $y = 0{,}08$ ou 8 %

Attribution des points

4 Réponse correcte (8%) avec explications claires et complètes
3 Réponse correcte (8%) avec des explications incomplètes
2 Réponse correcte (8%) sans explication
ou procédure et explication correctes mais erreur de calcul
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Campobasso