23ème Rallye Mathématique Transalpin
épreuve d'essai
Section de Bourg en Bresse

Vous trouverez ci-dessous, une épreuve d'essai du 23ème Rallye Mathématique Transalpin pour la catégorie 8.

10. ÉCLAIRS AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

Au bar du club de vacances « Archimède », il y a toujours des éclairs au chocolat. Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.

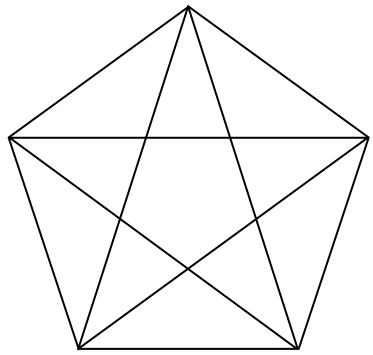
Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus. Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine?

Expliquez votre raisonnement.

11. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça ! »*

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

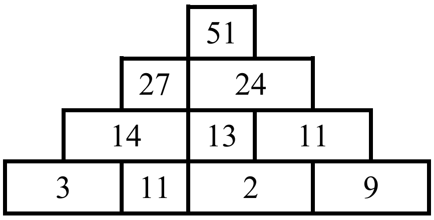
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

12. PYRAMIDES DE BRIQUES (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

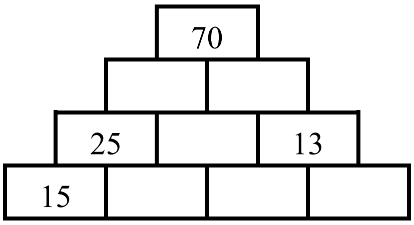
Matteo et Diego ont trouvé ce problème dans un magazine :

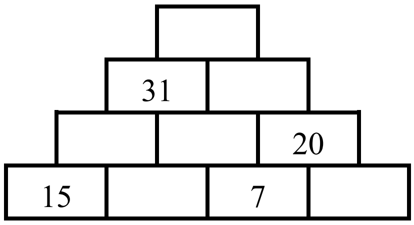
« Dans ces pyramides de briques, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante : Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.

Exemple :



Compléter les deux pyramides suivantes : »





Matteo et Diego commencent alors à compléter les deux pyramides proposées.

Lorsqu'ils confrontent leurs résultats, ils constatent qu'ils ont la même solution pour la pyramide de gauche.

Matteo dit qu'il n'est pas possible de compléter la pyramide de droite. En revanche, Diego, très fier de lui, affirme qu'il a trouvé les nombres qui lui permettent de la compléter selon la règle.

Complétez vous aussi les deux pyramides.

Expliquez votre raisonnement pour trouver les nombres manquants.

13. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8, 9 10)

Mme Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin. Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.

Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.

Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs. Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

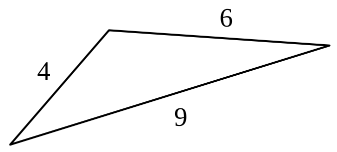
Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

14. BÂTONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

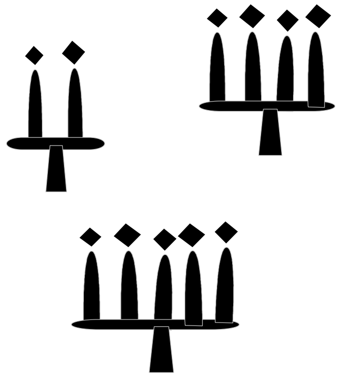
15. LA DATE DE NAISSANCE (Cat. 8, 9, 10)

Michèle dit à son nouvel ami qu'elle est capable de découvrir le jour et le mois de sa naissance s'il suit les instructions suivantes :
« Multiplie par 13 le numéro de ton jour de naissance. Multiplie par 14 le numéro de ton mois de naissance. Additionne les deux produits et dis-moi le résultat final de tes calculs. »
Son ami lui répond : « *Le résultat final de mes calculs est 479.* »

Quels sont le jour et le mois de naissance de l'ami de Michèle?

Expliquez votre raisonnement.

16. DINER AUX CHANDELLES (II) (Cat. 8, 9, 10)



Laura organise un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers. Elle utilise quatre chandeliers à deux bougies et d'autres chandeliers à quatre bougies et à cinq bougies. Sur chaque chandelier elle met le maximum de bougies possibles. Elle utilise ainsi au total 100 bougies et 25 chandeliers.

Combien de chandeliers à 4 bougies Laura utilise-t-elle ?

Et combien à 5 bougies ?

Expliquez votre raisonnement.

10. ÉCLAIRS AU CHOCOLAT (Cat. 6, 7, 8)

Au bar du club de vacances « Archimède », il y a toujours des éclairs au chocolat. Chaque jour, du lundi au vendredi, le bar se fait livrer la même quantité d'éclairs ; tandis que le samedi et le dimanche il commande 20 éclairs de plus que les autres jours, parce qu'il y a une plus forte demande.

Chaque jour de la semaine dernière (du lundi au dimanche) tous les éclairs ont été vendus. Durant le week-end, le bar a vendu en tout 4 éclairs de plus que ceux qui ont été vendus durant les cinq premiers jours de la semaine.

Combien d'éclairs sont-ils livrés au bar chaque jour de la semaine?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

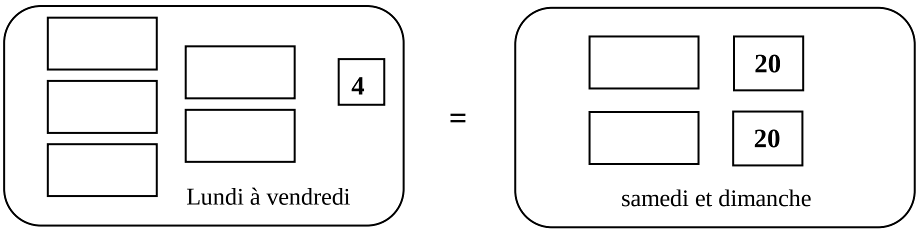
Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations, équivalences
- Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Se représenter la situation pour les différents jours de la semaine avec une « quantité » quotitienne, les deux « suppléments » de 20 du samedi et dimanche, les « 4 de plus » et la relation d'égalité.

  On peut penser à des « paquets » pour la quantité quotidienne, ou utiliser une représentation graphique de la situation évoquant les plateaux d'une balance en prenant garde à placer le « 4 » dans le bon plateau, par exemple :



  cette représentation, mentale ou graphique, suggère une simplification de la relation en « retirant » 2 « quantités » quotidienne et 4 de chaque membre de l'égalité pour arriver à l'équivalence de 3 « quantités » quotidiennes et de 36.

  En déduire que, chaque jour ouvrable de la semaine (lundi à vendredi), sont livrés 12 (36 : 3) éclairs, et le week-end (samedi et dimanche) 32 éclairs (12 + 20).

Ou: procéder par essais organisés en imposant un nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi et vérifier si les autres conditions sont remplies, sinon ajuster progressivement les valeurs.

  Par exemple, avec 10 on obtient 50 et 60, avec 20 : 100 et 80, avec 15 : 75 et 70 (on s'approche), et finalement avec 12, 60 et 64 correspondant au « 4 de plus » pour le week-end.

Ou, par voie algébrique, en désignant par x le nombre d'éclairs livrés chaque jour ouvrable par $x + 20$ ceux livrés le week-end, on aboutit à une équation $5x + 4 = 2(x + 20)$ ou $5x = 2(x + 20) - 4$ ou dont la solution est 12 (nombre d'éclairs livrés du lundi au vendredi) et calculer le nombre d'éclairs livrés un jour du week-end 32 = 12 + 20.

Attribution des points

4 Réponses correctes (32 éclairs le samedi et dimanche, 12 éclairs les autres jours) avec des explications claires (par exemple, détail des calculs)

3 Réponses correctes avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification

2 Réponses correctes sans aucune explication
ou une erreur de calcul pour l'une des deux réponses

1 Début de raisonnement correct
ou une erreur dans l'écriture de l'équation due à l'incompréhension de l'expression « 4 de plus que »

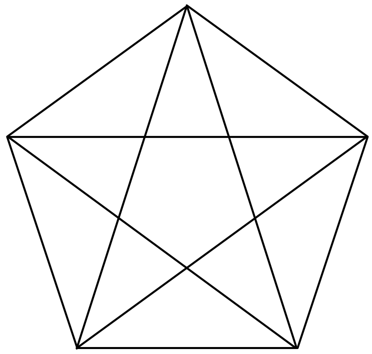
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine: Siena

11. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit : *« Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça !* »

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

Explíquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Géométrie : visualisation, reconnaissance et comptage de triangles dans une figure
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Savoir reconnaître des triangles dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les triangles égaux ;
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles, ne pas comptabiliser deux fois le même. Par exemple :

  les 10 triangles du pavage autour du pentagone central (noté *p* pour la suite de cette analyse); on peut éventuellement constater que 5 n'ont que des angls aigus, (notés *a* pour la suite) et que les 5 autres ont un angle obtus (notés *o* pour la suite).

  les 10 triangles composés d'un triangle *o* et d'un triangle *a* (*a, o*)

  les 5 triangles composés de deux triangles *o* et un triangle *a* (*o, a, o)*, un par sommet du pentagone,

  les 5 triangles (avec une diagonale comme base), composés du pentagone central et de deux triangles *a* (*a, p, a)*,

  les 5 triangles (avec une côté comme base), composés du pentagone central, un triangle *o* et de trois triangles *a* (*o, a, a, p, a)*,

  Soit cinq types de triangles faisant au total 10 + 10 + 5 + 5 + 5 = 35 triangles.

Il y a évidemment de nombreuses autres façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les triangles par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer les traits,
- nommer les 11 « pavés de base » et désigner les triangles par leur composition de ces pavés,
- travailler par types de triangles d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des symétries du pentagone régulier …

La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace pour le contrôle et l'élimination des doublons.

Attribution des points

4 Réponse correcte (35) avec explications claires et complètes (texte, liste ou dessin)
3 Réponse correcte (35) avec explications incomplètes
ou réponse 34 ou 36 avec un seul oubli ou un seul doublon, avec explications
2 Réponse (35) sans aucune explication
ou réponse (25 ou 30) avec oubli d'un seul des 5 types de triangles, avec explications
ou réponse incorrecte due à 2 à 3 oublis ou doublons avec explications
1 Réponse (15, 20 ou 25) avec oubli de deux types de triangles
ou réponse incorrecte due à 4 ou 5 oublis ou doublons
0 Moins de 15 triangles différents repérés

Niveau : 6, 7, 8

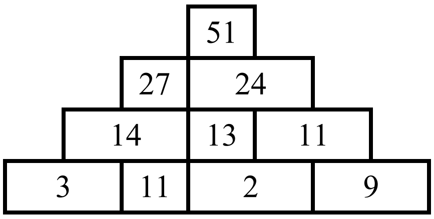
Origine : 7RMTF.1 adapté par Bourg-en-Bresse

12. PYRAMIDES DE BRIQUES (II) (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

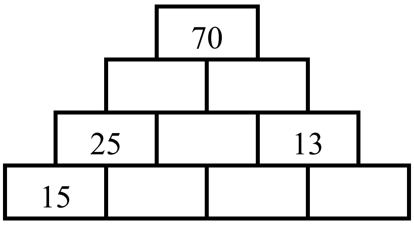
Matteo et Diego ont trouvé ce problème dans un magazine :

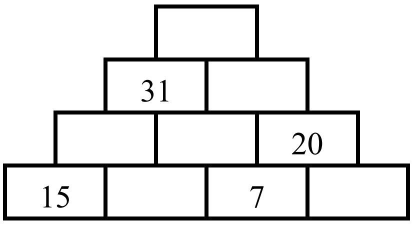
« Dans ces pyramides de briques, on écrit un nombre sur chaque brique, selon la règle suivante : Pour chaque brique qui repose sur deux autres, le nombre écrit est la somme des nombres des deux briques sur lesquelles elle est posée.

Exemple :



Compléter les deux pyramides suivantes : »





Matteo et Diego commencent alors à compléter les deux pyramides proposées.

Lorsqu'ils confrontent leurs résultats, ils constatent qu'ils ont la même solution pour la pyramide de gauche.

Matteo dit qu'il n'est pas possible de compléter la pyramide de droite. En revanche, Diego, très fier de lui, affirme qu'il a trouvé les nombres qui lui permettent de la compléter selon la règle.

Complétez vous aussi les deux pyramides.

Expliquez votre raisonnement pour trouver les nombres manquants.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique: addition et soustraction avec les nombres naturels et décimaux
- Logique : approche d'une résolution algébrique

Analyse de la tâche

- Vérifier l'exemple pour comprendre le fonctionnement de la pyramide et constater que deux briques peuvent être complétées immédiatement : 10 (25 – 15) à la base de la première pyramide et 13 (20 – 7) de la seconde.
- Constater que les autres nombres ne s'obtiennent pas directement, que des essais ou hypothèses sont nécessaires, puis chercher les « pistes » les plus favorables. Il y a par exemple de nombreuses décompositions de 70 (sommet de la première pyramide) ou de 13 (deuxième rang à droite) en somme de deux termes (même si on ne pense qu'aux nombres entiers positifs), qui exigeraient de très nombreux essais pour compléter la pyramide entière.
- Remarquer alors qu'une « clé » de la première pyramide peut être le nombre de la deuxième ligne, situé entre 25 et 13. Le « triangle » avec 25 et 13 à la base et 70 au sommet (voir *figure 1*) se complète alors…

  … soit par essais successifs sur le nombre-clé. (11 est trop petit, 20 est trop grand, …) pour aboutir à 16 ;

  … soit par un raisonnement déductif (ou préalgébrique) du genre : le « nombre cherché » (entre 25 et 13) sera additionné à 25 dans la case de gauche de l'étage supérieur et à 13 dans la case de droite, et finalement, 70 sera obtenu par 25 + 13 + 2 fois « le nombre cherché» ; par conséquent ce nombre sera 16, la moitié de 70 - (25 + 13) = 32,

  … soit par une procédure algébrique résumant la précédente et conduisant à l'équation : $(25 + x) + (13 + x) = 70$

- Le même raisonnement va aussi pour la deuxième pyramide, dans le « triangle » avec 15 et 7 à la base et 31 au sommet, (*Voir figure 2*) mais avec un « obstacle » supplémentaire, qui fait dire à Matteo *qu'on ne peut pas la compléter* : …

  … par essais, on trouvera que le nombre est plus grand que 4 et plus petit que 5,

  … par raisonnement préalgébrique, on trouvera que ce nombre est la moitié de 9, (Car pour obtenir 31 on effectue la somme de 15 et 7 = 22 à laquelle il faut encore ajouter 9. Par conséquent, le nombre qui doit être additionné à 15 comme à 22 doit être la moitié de 9).

  … par l'algèbre, le nombre est la solution de $(15 + x) + (7 + x) = 31$, c'est-à-dire 4,5.
- Comprendre alors que Diego a vu que le « nombre entre 15 et 7 » n'est pas entier comme tous les autres nombres présents dans la pyramide incomplète mais que l'énoncé n'interdit pas d'utiliser des nombres non entiers pour compléter la pyramide.
- Il suffit alors de compléter les autres cases par additions et soustractions.

Figure 1 les deux « triangles » - clé des deux pyramides

70
25 + **?** | 13+ **?**
25 | **?** | 13

31
15 + **?** | 7+ **?**
15 | **?** | 7

Figure 2 les deux pyramides complétées

70
41 | 29
25 | 16 | 13
15 | 10 | 6 | 7

62,5
31 | 31,5
19,5 | 11,5 | 20
15 | 4,5 | 7 | 13

Il y a encore, évidemment, de nombreuses autres manières d'organiser les essais, mais tous doivent passer par les nombres-clés 16 et 4,5.

Attribution des points

4 Les deux pyramides complétées, avec une explication du raisonnement (au moins une description de la démarche pour trouver les « nombres-clés »)

3 Les deux pyramides correctes mais explications incomplètes (seulement quelques opérations, sans description des essais ou du raisonnement)

2 Les deux pyramides correctes sans aucune explication

ou 1^{ere} pyramide complétée avec explication et deuxième pyramide non complétée avec l'affirmation qu'il n'y a pas de nombres qui puissent compléter certaines briques

1 Une seule des deux pyramides correctes sans explications

ou seulement les briques 10 (25 – 15) à la base de la première pyramide et 13 (20 – 7) de la seconde

0 Incompréhension du problème

Niveaux: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: Rozzano

13. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8, 9 10)

Mme Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin. Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.

Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.

Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs. Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique: fractions (de numérateur 1), somme et différence

Analyse de la tâche

- Comprendre les critères que Mme Petitepart entend respecter pour planter ses tulipes de façon à couvrir entièrement le parterre de fleurs en utilisant tous les bulbes des couleurs qu'elle aura sélectionnées.
- Observer que la partie du parterre qui peut être couverte avec une variété de tulipes est exprimée par une fraction de numérteur 1 et que l'entier correspond à la totalité du parterre.
- Se rendre compte qu'il faut trouver trois ou quatre fractions, parmi celles données, dont la somme est égale à 1.
- Constater par exemple qu'en choisissant des tulipes rouges, jaunes et orange on obtiendrait $1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12 > 1$ et on couvrirait plus que le parterre.
- Procéder par essais successifs et trouver qu'en utilisant des tulipes rouges, jaunes et lilas on peut remplir exactement le parterre : $1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$
- En procédant de même, trouver qu'en utilisant les tulipes rouges, oranges, lilas et saumon, on obtient une seconde solution : $1/2 + 1/4 + 1/6+ 1/12 = 1$

Ou réduire au même dénominateur les 8 codes fractionnaires (le plus petit est 360) et chercher trois (puis quatre) numérateurs dont la somme est égale à 360.

Attribution des points

4 Réponse correcte aux deux questions (rouge, jaune, lilas) et (rouge, orange, lilas, saumon) avec explications claires

3 Réponse correcte aux deux questions avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification

2 Réponse correcte à une seule question avec explications
ou réponse correcte aux deux questions sans explications

1 Début de raisonnement correct

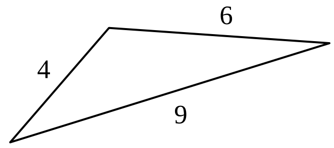
0 Incompréhension du problème

Niveau : 7, 8, 9, 10

Origine : Lodi

14. BÂTONNETS ET TRIANGLES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Georges a trouvé dans une boîte six bâtonnets dont les longueurs sont : 4 cm, 5 cm, 6 cm, 9 cm, 10 cm et 11 cm.
Il en choisit trois pour former un triangle.
Voici par exemple le triangle construit avec les trois bâtonnets de 4 cm, 6 cm et 9 cm de longueur :



Après avoir construit un triangle, Georges remet les trois bâtonnets dans la boîte et recommence.

Combien de triangles différents Georges pourra-t-il construire avec ses six bâtonnets ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses et décrivez-les.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Combinatoire
- Géométrie: triangle, construction, inégalité triangulaire

Analyse de la tâche

- Comprendre que trois bâtonnets permettent de construire un seul triangle.
- Comprendre que seulement les triplets vérifiant l'inégalité triangulaire permettent de construire un triangle (par exemple les triplets comme 4 - 5 - 10 ou 4 - 5 - 9 ne le permettent pas. (Un obstacle bien connu est celui du recours au seul dessin pour décider si le triangle est constructible : car même avec un dessin précis un triangle « impossible » peut apparaître 4 - 5 - 9 ou 4 - 6 - 10 ou 5 - 6 - 11).
- Dresser l'inventaire des 14 triplets différents (sans tenir compte de l'ordre pour éviter les triangles égaux) formés avec les 6 nombres: 4, 5, 6, 9, 10, 11, en éliminant ceux qui ne respectent pas l'inégalité triangulaire (l'un ne peut pas être supérieur ou égal à la somme des deux autres).

  Trouver les 14 triplets solutions :

  4 - 5 - 6 ; 4 - 6 - 9 ; 4 - 9 - 10 ; 4 - 9 - 11 ; 4-10-11 ; 5 - 6 - 9 ; 5 - 6- 10 ; 5 - 9 - 10 ;5 - 9 - 11 ; 5 - 10 - 11 ; 6 - 9 - 10 ; 6 - 9 - 11; 6 - 10 - 11 : 9 - 10 - 11

Ou : dessiner les triangles un à un.

Ou : par manipulation, découper 6 bandes et procéder par esais successifs

- Conclure qu'il y a 14 triangles possibles (y compris celui qui figure dans l'énoncé)

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (14 triangles donnés par leurs côtés ou pr dessins) avec explications claires (inégalité triangulaire mentionnée, …)

3 Réponse correcte et complète sans explications
ou une seule erreur (13 corrects et un oubli ou un seul doublon) avec explications

2 De 9 à 12 à triangles corrects, oublis ou doublons ou solutions incorrectes (par ex. « triangle plat ») avec explications
ou la réponse 14, sans explications

1 De 6 a 8 triangles corrects, avec oublis et intrus de la forme « triangle plat »
ou : réponse 20 triangle qui donne les 20 arrangements des 6 nombres pris 3 à 3 (sans tenir compte des contraintes géométriques)

0 Incompréhension du problème ou moins de 6 triangles corrects

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Puglia et RMT (7.II.9)

15. LA DATE DE NAISSANCE (Cat. 8, 9, 10)

Michèle dit à son nouvel ami qu'elle est capable de découvrir le jour et le mois de sa naissance s'il suit les instructions suivantes :
« Multiplie par 13 le numéro de ton jour de naissance. Multiplie par 14 le numéro de ton mois de naissance. Additionne les deux produits et dis-moi le résultat final de tes calculs. »
Son ami lui répond : *« Le résultat final de mes calculs est 479. »*

Quels sont le jour et le mois de naissance de l'ami de Michèle?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Arithmétique : multiples et division euclidienne
- Algèbre

Analyse de la tâche

- La première tâche est de comprendre que le résultat demandé est la somme d'un multiple de 13 (du premier au 31^e) et d'un multiple de 14 (du premier au 12^e).

  Pour bien comprendre la correspondance entre les dates et les sommes (et éventuellement s'assurer que deux dates de naissance différentes donnent deux résultats différents, et réciproquement), on peut imaginer les calculs de quelques dates, par exemple celles des premiers jours de l'année : 1 janvier $13 + 14 = 27$; 2 janvier $2 \times 13 + 14 = 40$; 1 février $13 + 2 \times 14 = 41$ …

  en notant ces essais dans un tableau, on peut en découvrir les régularités : en janvier, des nombres qui valent 1 de plus qu'un multiple de 13, des suites de nombres entiers consécutifs en se déplaçant « en oblique » vers le bas et vers la gauche,

jours	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20	…	30	31
janvier (1)	27	40	53	66	79	92	105	118	131	144	…	274		404	417
février (2)	41	54	67	80	93	106	119	132	145	158	…	288			
mars (3)	55	68	81	94	107	120	.133	146	158	172	…	302		432	445

  Ce tableau permet déjà de constater que 479 est au-delà du mois de mai car le 31 mai donne $445 + 2 \times 14 = 473$. (On pourrait même y voir que 479 est à 6 « pas » de 473 : 6 lignes vers le bas et 6 colonne vers la gauche, le 25 novembre).

Ou : soustraire de 479 des multiples de 14 (du 1 jusqu'au 12^e pour les mois) et diviser le résultat par 13 jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre entier compris entre 1 et 31.

$$(479 - 1 \times 14) : 13 = 35{,}77$$
$$\dots$$
$$(479 - 10 \times 14) : 13 = 26{,}08$$
$$\mathbf{(479 - 11 \times 14) : 13 = 25}$$
$$(479 - 12 \times 14) : 13 = 23{,}92$$

Donc la date de naissance de l'ami de Michèle est le 25 novembre.

Ou, par une méthode plus générique, comprendre que le résultat final est une expression du type :

$479 = 13j + 14m$ (j = jour de naissance; m = mois de naissance)

- En déduire la factorisation suivante : $479 = 13j + 13m + m = 13(j + m) + m,$

  constater que le mois de naissance (m) est le reste de la division euclidienne du résultat final 479 par 13 :

  $479 = 36 \times 13 + 11$, et que le mois de naisssance est donc novembre, 11^e mois de l'année.
- en déduire le jour de naissance en résolvant l'équation suivante : $479 = j \times 13 + 11 \times 14$ d'où $j = 25$ (ou par soustraction et division par 13 comme dans la première des procédures ci-dessus)

Attribution des points

4 Réponse correcte (25 novembre) avec explications claires et détaillées

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Réponse correcte sans explication
ou réponse bien expliquée mais avec un seule ereur de calcul

1 Début de raisonnement correct (essai avec une date de naissance connue)

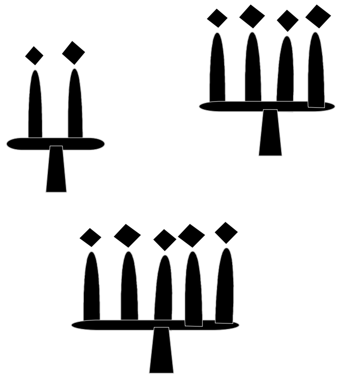
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Luxembourg

16. DINER AUX CHANDELLES (II) (Cat. 8, 9, 10)

Laura organise un dîner dans son jardin. Pour créer une belle atmosphère, elle éclaire la table avec des chandeliers. Elle utilise quatre chandeliers à deux bougies et d'autres chandeliers à quatre bougies et à cinq bougies. Sur chaque chandelier elle met le maximum de bougies possibles. Elle utilise ainsi au total 100 bougies et 25 chandeliers.



Combien de chandeliers à 4 bougies Laura utilise-t-elle ?

Et combien à 5 bougies ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : décomposition d'un nombre en somme de produits

Algèbre : système d'équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Tirer les données numériques de l'énoncé : 100 bougies réparties sur 25 chandeliers à 2 à 4 ou à 5 bougies chacun; dont 4 chandeliers à 2 bougies.
- Simplifier la situation sans les 4 chandeliers à 2 bougies pour arriver à : 92 bougies réparties sur 21 chandeliers à 4 ou à 5 bougies.
- Se représenter les données précédentes par des égalités du genre :
  une addition de 21 termes « 4 et « 5 » : $92 = 4 + 4 + \ldots + 5 + 5 + 5 + \ldots$
  ou par une addition de 21 multiples de 4 et de 5 encore lacunaire $92 = (? \times 4) + (? \times 5)$
  ou, algébriquement, par un système de deux équations : $92 = 4x + 5y$ et $x + y = 21$

Il y a de multiples manières de trouver la solution par voie arithmétique :

- par essais successifs qui s'organisent de manière de plus en plus efficace lors de la recherche (par exemple, le nombre de chandeliers à 5 bougies est inférieur à 18, c'est un nombre pair, …)
- par des listes où les deux nombres de chandeliers varient simultanément, du genre :,
  $(10 \times 4) + (11 \times 5) = 40 + 77 = 95$
  $(11 \times 4)+ (10 \times 5) = 44 + 50 = 94$
  $(12 \times 4) + (9 \times 5) = 48 + 45 = 93$
  $\mathbf{(13 \times 4) + (8 \times 5) = 52 + 40 = 92}$
- Par voie algébrique, la solution du sytème linéaire de deux équations à deux inconnues donne $x = 13$ et $y = 8$

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 chandeliers à 4 bougies et 8 à 5 bougies) avec explications claires (où l'unicité de la solution apparaît clairement en cas de résolution arithmétque)

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais avec un raisonnement correct
ou système des deux équations correct, sans arriver à la solution
ou réponse correcte sans explication

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena