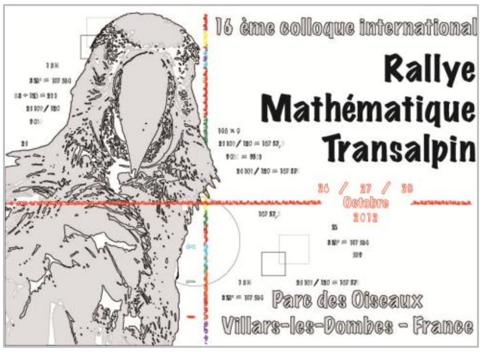
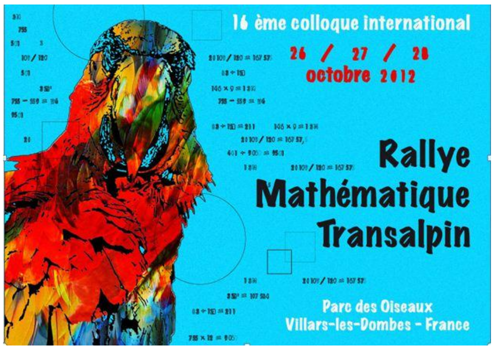
21ème Rallye Mathématique Transalpin.
Epreuve d'essai
Pour la section de Bourg en Bresse



Vous trouverez ci-dessous, les problèmes de la catégorie 8 (4ème) qui sont suivis des analyses à priori et des attributions de points qui sont en vigueur sur le Rallye.
Cette épreuve d'essai doit vous permettre de savoir avec vos élèves si la participation au rallye est envisageable tout en dégageant des pistes de travail pour le comportement à avoir face à une telle situation.



12. PINOCCHIO LE FAMEUX MENTEUR (Cat. 6, 7, 8)

Pinocchio est un fameux menteur. Lorsqu'on lui pose des questions, parfois il dit des gros mensonges et parfois des petits mensonges. Quelquefois aussi, il dit la vérité.

Chaque fois qu'il dit un petit mensonge, son nez s'allonge de 4 cm et chaque fois qu'il dit un gros mensonge, son nez s'allonge de 6 cm. Heureusement, chaque fois qu'il dit une vérité son nez devient la moitié de ce qu'il était avant.

Lorsque Pinocchio s'est levé ce matin, son nez mesurait 2 cm. Au cours de la journée, il a répondu à 5 questions. La deuxième et la cinquième fois, il a dit la vérité. Mais, les autres fois, il a menti.

À la fin de la journée, Pinocchio mesure son nez et se dit : « Mon nez mesure 1,5 cm de plus que si je n'avais dit qu'un seul gros mensonge ».

Combien Pinocchio a-t-il pu dire de gros mensonges et à quelles questions a-t-il pu le faire : à la première, à la troisième, à la quatrième ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

13. UNE ANNÉE PARTICULIÈRE (Cat. 6, 7, 8)

2010

En 2010 les personnes nées en 19**46** ont fêté leurs **64** ans : elles pouvaient écrire leur âge en inversant les deux derniers chiffres de leur année de naissance.

En 2010 ce phénomène s'est aussi produit pour des personnes nées en d'autres années.

Indiquez quel âge avaient toutes ces personnes en 2010.

Expliquez comment vous avez trouvé.

14. À MIDI (Cat. 7, 8, 9, 10)

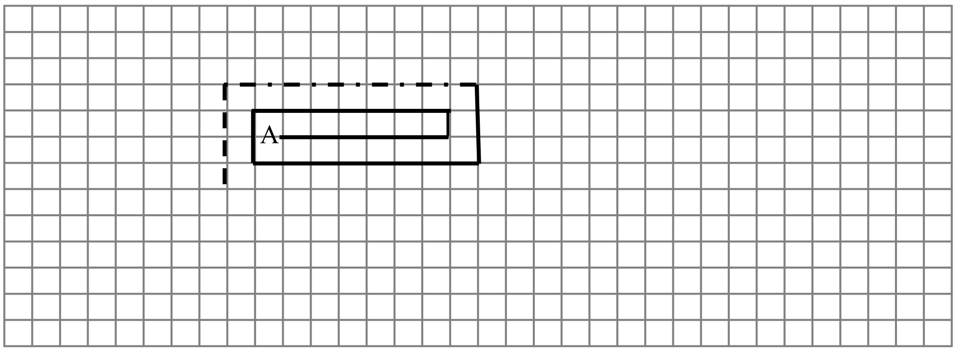
André vient de se réveiller et demande à sa maman quelle heure il est.
Elle lui répond : « J'ai regardé l'heure, il y a exactement cinquante minutes. À ce moment, j'ai remarqué que pour arriver à midi il fallait le double du nombre de minutes qui s'étaient écoulées depuis 8 heures. »

À quelle heure André s'est-il réveillé ?

Expliquez votre raisonnement.

15. UNE SPIRALE PARTICULIÈRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Gianni a une feuille de papier quadrillé, sur laquelle les carreaux ont un côté de 1 cm. Il commence à dessiner une spirale comme celle que vous voyez sur la figure; il part de A, se déplace horizontalement de 6 carreaux, puis verticalement de 1 carreau, puis de nouveau horizontalement de 7 carreaux, puis verticalement de 2 carreaux, et ainsi de suite.



Gianni s'arrête après le cinquantième segment horizontal.

Combien mesure, en centimètres, la spirale dessinée par Gianni ?

Expliquez votre raisonnement.

16. JUMEAUX CHANCEUX (Cat. 8, 9, 10)

On dit que deux nombres forment un « couple de jumeaux » si :

- ce sont des nombres consécutifs,
- le chiffre 0 n'apparaît pas dans leur écriture,
- pour écrire le couple on utilise exactement deux chiffres différents.

Par exemple 43 et 44 forment un couple de jumeaux, ainsi que 343 et 344, alors que 434 et 435 ne le sont pas (parce qu'on utilise trois chiffres différents pour les écrire).

Francesca, qui pense que 13 est son nombre « porte-bonheur », a essayé d'écrire tous les couples de jumeaux dont 13 est la somme des chiffres.

(Dans les exemples précédents, les sommes des chiffres des deux couples de jumeaux sont respectivement 15 et 21).

Faites la liste complète de tous les couples de nombres jumeaux que Francesca devra écrire et indiquez combien il y en a.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

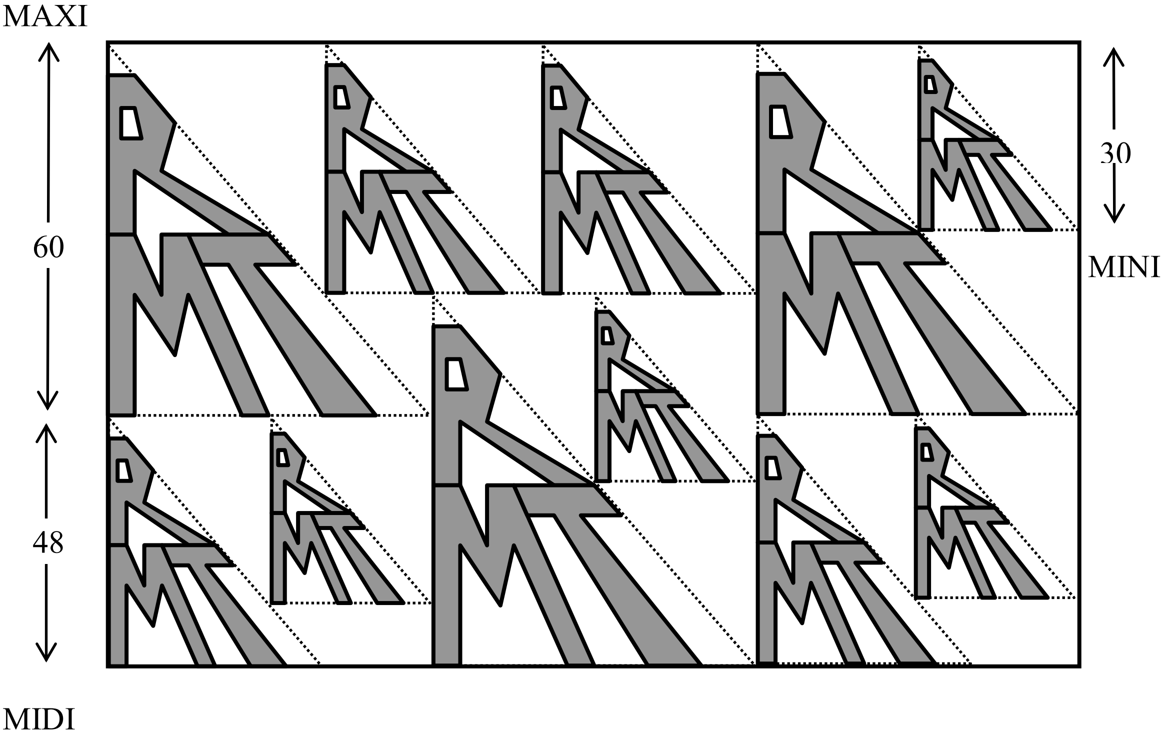
17. LES PLAQUES (Cat. 8, 9, 10)

Monsieur Ronald Mac Terror a créé des plaques magnétiques en forme de triangles rectangles, à fixer sur les portes de frigos. Trois formats sont disponibles (voir la figure) :

Le modèle « MINI » a 30 cm de hauteur.

Le modèle « MIDI » a 48 cm de hauteur.

Le modèle « MAXI » a 60 cm de hauteur.



Il a découpé soigneusement ses plaques dans la même feuille de métal et les a pesées.

Les 4 plaques « MINI » pèsent ensemble exactement 216 grammes.

Combien pèsent les 7 autres plaques ensemble ?

Donnez le résultat au gramme près.

Expliquez votre solution.

18. LA TABLE DE DIVISIONS (Cat 8, 9, 10)

Jules a construit une table de divisions des nombres naturels de 1 à 100 à l'aide de son ordinateur.

Il a demandé à son programme de calcul d'arrondir les quotients au centième près (deux chiffres après la virgule) pour limiter le nombre de pages à imprimer.

Voici le coin supérieur gauche de la première page de sa table de division :

(Par exemple, à l'intersection de la colonne 4 et de la ligne 9 on trouve le quotient de 4 par 9, dont seulement les deux premières décimales sont écrites 4 : 9 ≈ 0,44.)

:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
1	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	
2	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	
3	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00	
4	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	
5	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	
6	0.17	0.33	0.50	0.67	0.83	1.00	
7	0.14	0.29	0.43	0.57	0.71	0.86	
8	0.13	0.25	0.38	0.50	0.63	0.75	
9	0.11	0.22	0.33	0.44	0.56	0.67	
10	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	
11	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	

Voici un rectangle découpé, plus loin, dans la table de Jules :

0.64	0.71	0.79	**0.86**	0.93	1.00	1.07
0.60	**0.67**	0.73	0.80	0.87	0.93	1.00
0.56	**0.63**	0.69	0.75	0.81	0.88	0.94
0.53	0.59	0.65	0.71	0.76	0.82	0.88
0.50	0.56	0.61	**0.67**	0.72	0.78	0.83
0.47	0.53	0.58	**0.63**	0.68	0.74	0.79
0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75

Les deux écritures 0.67 que l'on y voit représentent-elles le même quotient ?

Les deux écritures 0.63 représentent-elles le même quotient ?

Donnez les 10 premières décimales du quotient représenté par 0.86 dans cette partie de la table.

Expliquez vos réponses.

12. PINOCCHIO LE FAMEUX MENTEUR (Cat. 6, 7, 8)

Pinocchio est un fameux menteur. Lorsqu'on lui pose des questions, parfois il dit des gros mensonges et parfois des petits mensonges. Quelquefois aussi, il dit la vérité.

Chaque fois qu'il dit un petit mensonge, son nez s'allonge de 4 cm et chaque fois qu'il dit un gros mensonge, son nez s'allonge de 6 cm. Heureusement, chaque fois qu'il dit une vérité son nez devient la moitié de ce qu'il était avant.

Lorsque Pinocchio s'est levé ce matin, son nez mesurait 2 cm. Au cours de la journée, il a répondu à 5 questions. La deuxième et la cinquième fois, il a dit la vérité. Mais, les autres fois, il a menti.

À la fin de la journée, Pinocchio mesure son nez et se dit : « Mon nez mesure 1,5 cm de plus que si je n'avais dit qu'un seul gros mensonge ».

Combien Pinocchio a-t-il pu dire de gros mensonges et à quelles questions a-t-il pu le faire : à la première, à la troisième, à la quatrième ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSI A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et admettre qu'il y a peut-être plusieurs solutions ; déduire de l'énoncé que Pinocchio a dit au moins deux gros mensonges et comprendre que l'ordre dans lequel sont données les réponses a de l'importance.
- Faire l'inventaire des situations qui correspondent à un seul gros mensonge et déterminer le nombre de centimètres correspondants auquel il faudra ajouter 1,5 cm. (Par exemple, on peut disposer, le gros mensonge (G) ou (+6) en 1e questions ou en 3e ou 4e question, ces deux dernières conduisant au même résultat, lignes 2 et 3) :

1) départ : 2	G (+6) –> 8	V (:2) –> 4	P (+ 4) –> 8	P (+ 4) –> 12	V (: 2) –>	à la fin : 6 (cm)
2) départ : 2	P (+4) –> 6	V (:2) –> 3	G (+ 6) –> 9	P (+ 4) –> 13	V (: 2) –>	à la fin : 6,5 (cm)
3) départ : 2	P (+4) –> 6	V (:2) –> 3	P (+ 4) –> 7	G (+ 6) –> 13	V (: 2) –>	à la fin : 6,5 (cm)

En déduire que le nez de Pinocchio mesure 7,5 ou 8 cm.

- Envisager alors les cas avec deux gros mensonges, c'est-à-dire un seul petit mensonge qui peut être en 1e question ou en 3e ou 4e (avec le même résultat dans ces deux lignes 5 et 6)

4) départ : 2	P (+ 4) –> 6	V (: 2) –> 3	G (+ 6) –> 9	G (+ 6) –> 15	V (: 2) –>	à la fin : **7,5 (cm)**
5) départ : 2	G (+ 6) –> 8	V (: 2) –> 4	P (+ 4) –> 8	G (+ 6) –> 14	V (: 2) –>	à la fin : 7 (cm)
6) départ : 2	G (+ 6) –> 8	V (: 2) –> 4	G (+ 6) –> 10	P (+ 4) –> 14	V (: 2) –>	à la fin : 7 (cm)

Les 2 gros mensonges sont en 3e et 4e question, le nez a 7,5 cm, soit 1,5 de plus que 6 cm avec un gros mensonge.

- Envisager enfin le dernier cas, avec trois gros mensonges :

7) départ : 2	G (+6) –> 8	V (:2) –> 4	G (+ 6) –> 10	G (+ 6) –> 16	V (:2) –>	à la fin : **8 (cm)**

Avec 3 gros mensonges le nez a 8 cm, soit 1,5 de plus que 6,5 cm avec un seul gros mensonge à la 3e ou 4e question.

Attribution des points

4 Réponse correcte (deux possibilités : 3 gros mensonges aux questions 1, 3 et 4 ou 2 gros mensonges aux questions 3 et 4) avec explication montrant clairement l'exhaustivité des cas possibles, avec le détail des longueurs du nez

3 Réponse correcte avec méthode peu claire (où l'on n'est pas certain que toutes les possibilités aient été envisagées)

2 Une seule possibilité trouvée avec méthode apparente
ou deux possibilités trouvées avec le détail des longueurs mais sans préciser à quelles questions ont été dits les gros mensonges

1 Une seule possibilité trouvée avec méthode peu apparente ou mal expliquée
ou début de recherche correcte, en particulier déduction correcte du nombre de cm à la fin (7,5 cm ou 8 cm)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Valle D'Aosta

13. UNE ANNÉE PARTICULIÈRE (Cat. 6, 7, 8)

2010

En 2010 les personnes nées en 19**46** ont fêté leurs **64** ans : elles pouvaient écrire leur âge en inversant les deux derniers chiffres de leur année de naissance.

En 2010 ce phénomène s'est aussi produit pour des personnes nées en d'autres années.

Indiquez quel âge avaient toutes ces personnes en 2010.

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique
- Arithmétique

Analyse de la tâche

- Procéder par essais plus ou moins organisés en faisant une hypothèse sur l'année de naissance, puis calculer l'âge correspondant en 2010 et valider ou non la réponse en contrôlant si le nombre donnant l'âge calculé correspond au nombre obtenu en inversant les deux derniers chiffres de l'année de naissance.

Ou : procéder de même en faisant une hypothèse sur l'âge en 2010 et en calculant les années de naissances correspondantes.

Ou : remarquer, après quelques essais, que la somme des chiffres des âges qui conviennent est 10. Lister alors tous les nombres de deux chiffres dont la somme des chiffres est 10. Vérifier la cohérence entre âges et années ainsi déterminés.

Ou remarquer que le chiffre des dizaines (ou celui des unités) du nombre désignant l'âge est nécessairement le complément à 10 du chiffre des dizaines (ou respectivement de celui des unités) du nombre indiquant l'année de naissance. (Car la somme de l'âge et de l'année de naissance, 2010, se termine par 0). En déduire, qu'à cause de la condition sur l'inversion des chiffres, ce complément est le chiffre des dizaines (respectivement des unités) correspondant. Lister, alors tous les nombres de deux chiffres dont la somme des chiffres est 10 pour déterminer tous les âges qui conviennent.

Attribution des points

4 Réponses correctes (19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91), avec explication claire

3 Réponses correctes et complètes sans explications
ou réponse correcte avec un oubli (différent de 64)

2 Réponse incomplète (de 2 à 4 oublis), mais qui montre une bonne compréhension d'un problème et témoigne de la mise en place d'une stratégie pour essayer de lister les réponses possibles

1 Début de recherche, une année de naissance au moins a été correctement déterminée (différente de 64)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Bourg-en-Bresse

14. À MIDI (Cat. 7, 8, 9, 10)

André vient de se réveiller et demande à sa maman quelle heure il est.

Elle lui répond : « J'ai regardé l'heure, il y a exactement cinquante minutes. À ce moment, j'ai remarqué que pour arriver à midi il fallait le double du nombre de minutes qui s'étaient écoulées depuis 8 heures. »

À quelle heure André s'est-il réveillé ?

Expliquez votre raisonnement.

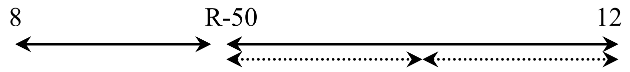
ANALYSE A PRIORI

Domaine conceptuel

- Mesure du temps : heures et minutes
- Algèbre : équations

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : entre 50 minutes avant le réveil, « R - 50 » et midi ; il y a le double de minutes qu'entre 8h et « R - 50 ». La traduire éventuellement au moyen d'un schéma permettant de « voir » que la durée totale est répartie en trois « tiers ».



- Remarquer que de 8 h à midi, il se passe 4 h ou 240 minutes et en déduire qu'il y a 80 = 240 : 3 minutes entre 8h et « R – 50 », puis 80 + 50 = 130 (minutes) entre 8h et le moment du réveil « R ». C'est-à-dire qu'André s'est réveillé à 10h10.

Ou : procéder par essais successifs et trouver l'horaire qui remplit les conditions (cinquante minutes auparavant, il manquait pour aller à midi le double des minutes écoulées depuis 8 h). Éventuellement commencer les essais à partir d'un horaire plausible comme 10 h, et procéder par ajustements successifs.

Ou : poser une équation dans laquelle l'inconnue *x*, exprimée en heures, est l'heure actuelle :

$12 - \left(x - \frac{50}{60}\right) = 2\left(x - \frac{50}{60} - 8\right)$ d'où $x = \frac{61}{6}$, il est donc 10 heures et 10 minutes, ou 10 h 10.

- Si x est la durée de 8 h à « R-50 », on obtient, avec x exprimé en heures : $x + 8 = 12 - 2x$ d'où $x = 4/3$.
- ou, avec x et les heures exprimées en minutes), $x + 480 = 720 -2x$ d'où $x = 80$.

  Dans chacun des deux cas précédents, il faut interpréter la solution (et ajouter les 50 minutes).

Attribution des points :

4 Solution correcte 10 h 10 avec explications complètes.

3 Solution correcte, avec explications incomplètes ou seulement une vérification

2 Solution correcte sans explications
ou démarche correcte avec erreur de calcul
ou procédure correcte mais interprétation erronée du résultat (par exemple 9h20, avec confusion entre l'heure de réveil et 50 minutes avant l'heure de réveil)

1 Début de raisonnement correct

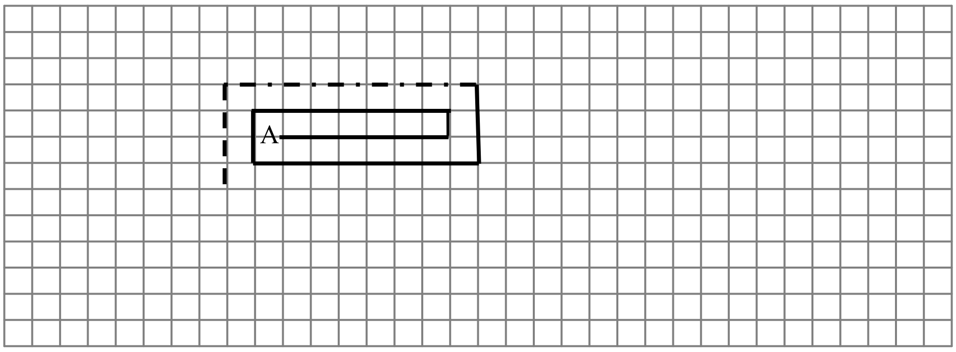
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Ticino

15. UNE SPIRALE PARTICULIÈRE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Gianni a une feuille de papier quadrillé, sur laquelle les carreaux ont un côté de 1 cm. Il commence à dessiner une spirale comme celle que vous voyez sur la figure; il part de A, se déplace horizontalement de 6 carreaux, puis verticalement de 1 carreau, puis de nouveau horizontalement de 7 carreaux, puis verticalement de 2 carreaux, et ainsi de suite.



Gianni s'arrête après le cinquantième segment horizontal.

Combien mesure, en centimètres, la spirale dessinée par Gianni ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine conceptuel

- Arithmétique : somme de nombres entiers successifs ; propriétés des opérations
- Algèbre : approche de la notion de suite arithmétique

Analyse de la tâche:

- Comprendre les règles de construction de la spirale et se rendre compte que les mesures des segments en cm, aussi bien horizontaux que verticaux, augmentent chaque fois de 1 cm.
- Observer que la mesure des segments verticaux est 1, 2, 3, 4... et celle des segments horizontaux est 6, 7, 8, 9... , constater que la mesure du n-ième segment horizontal est $n + 5$ et que, par conséquent la longueur du cinquantième segment horizontal est 50 + 5 = 55 cm, ou, par un raisonnement analogue, 49 + 6 = 55.
- Exprimer la longueur totale de la spirale, ou se rendre compte qu'elle est la somme de deux progressions arithmétiques : (6 + 7 + … 54 + 55) + (1 + 2 + 3 + … + 48 + 49) et effectuer les additions une à une calculatrice (avec un grand risque d'erreur, même en utilisant la calculatrice).

Ou mettre en œuvre des propriétés des opérations : commutativité, associativité et distributivité, permettant de simplifier les calculs en regroupant des termes ou transformant des sommes en produits. Par exemple :

en associant par deux les termes de chaque suite (à partir du début et de la fin) pour obtenir des sommes partielles constantes : (6 + 7 + … + 54 + 55) + (1 + 2 + ... + 48 + 49) = (6 + 55) + (7 + 54) + … + (1 + 48) + (2 + 47) + … = = 61 × 25 + 49 × 25 = 110 × 25 = 2750

ou en regroupant les termes des deux suites deux à deux 6 + 1 + 7 + 2 + 8 + 3 + … + 54 + 49 + 55 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 49) + (1 + 2 + 3 + 4 +… + 49) + 6 x 50 = 2 x (1+2+3+4+….+49) + 6 x 50, puis comme précédemment, par association et distributivité, arriver à 49 x 50 + 6 x 50 = 55 x 50 = 2750.

Attribution des points:

4 Réponse correcte (2750 cm) avec explications claires (calculs détaillés)

3 Réponse correcte avec explications peu claires
ou réponse correcte avec explication claire et une seule erreur de calcul ou de détermination des longueurs des derniers segments

2 Réponse correcte, sans explications
ou deux erreurs ou imprécisions

1 Début de raisonnement correct ou réponse avec plus de deux erreurs

0 Incompréhension du problème

Niveaux: 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

16. JUMEAUX CHANCEUX (Cat. 8, 9, 10)

On dit que deux nombres forment un « couple de jumeaux » si :

- ce sont des nombres consécutifs,
- le chiffre 0 n'apparaît pas dans leur écriture,
- pour écrire le couple on utilise exactement deux chiffres différents.

Par exemple 43 et 44 forment un couple de jumeaux, ainsi que 343 et 344, alors que 434 et 435 ne le sont pas (parce qu'on utilise trois chiffres différents pour les écrire).

Francesca, qui pense que 13 est son nombre « porte-bonheur », a essayé d'écrire tous les couples de jumeaux dont 13 est la somme des chiffres.

(Dans les exemples précédents, les sommes des chiffres des deux couples de jumeaux sont respectivement 15 et 21).

Faites la liste complète de tous les couples de nombres jumeaux que Francesca devra écrire et indiquez combien il y en a.

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

Arithmétique : chiffre - nombre, numération de position

Combinatoire : permutations

Analyse de la tâche

- Comprendre que si un nombre appartient à un couple de jumeaux, il s'écrit avec un seul chiffre (éventuellement répété) ou deux chiffres différents (éventuellement répétés).
- Comprendre aussi que si deux nombres sont consécutifs, les nombres obtenus par les sommes des chiffres de chacun le sont aussi et, dans le cas où les nombres consécutifs sont jumeaux, alors les deux seuls chiffres qui apparaissent doivent aussi être consécutifs et le plus petit des deux doit apparaître dans les unités du premier nombre du couple.
- Déduire, alors, que pour avoir une somme de 13 dans un couple de jumeaux le premier nombre doit avoir 6 comme somme des chiffres et le second 7. (C'est le seul moyen d'obtenir 13 comme somme de deux nombres consécutifs).
- Faire la liste des deux chiffres consécutifs qui peuvent apparaître dans un nombre comme somme des chiffres, 6 (ou 7 pour celui qui le suit): **1-2, 2-3, 3-4, 6-7** (éliminer 0-1 parce que le 0 ne doit pas apparaître). Les chiffres consécutifs 4-5, 5-6 sont éliminés parce qu'avec les nombres d'un chiffre, on n'atteint pas la somme 13, alors qu'avec des nombres de deux chiffres, la somme est supérieure à 13 (17 au minimum); les chiffres consécutifs 7-8, 8-9 sont éliminés parce qu'avec des nombres d'un chiffre, on obtient déjà des sommes supérieures à 13.
- Chercher les nombres jumeaux que l'on peut obtenir pour chacun des deux couples possibles de chiffres :

1-2:	**1221-1222; 2121-2122; 2211-2212**
	11121-11122; 11211-11212; 12111-12112; 21111-21112
	111111-111112
2-3:	**222-223**
3-4:	**33-34**
6-7:	**6-7**

- Conclure qu'il y a 11 couples de jumeaux de somme 13

Ou: partir du couple de jumeaux d'un chiffre **6-7** et décomposer successivement le 6 et le 7 en couples de nombres consécutifs de 2 chiffres qui forment des nombres de 2, 3…, 6 chiffres.

6 dans 33 et 7 dans 34, puis 6 dans 222 et 7 dans 223, etc.

Ou : procéder par divisions avec reste. Pour trouver le premier nombre du couple de jumeaux, diviser 6 (qui est la somme des chiffres de ce nombre) progressivement pour 1, 2, 3…, 6 et trouver de cette manière les couples de jumeaux de 1 chiffre, 2 chiffres…, 6 chiffres, par exemple :

6:1 = 6 avec reste 0 (couple de jumeaux de 1 chiffre dans lequel le chiffre 6 apparaît exactement une fois dans le premier nombre) (**6-7**)

6:5 = 1 avec reste 1 (couple de jumeaux de 5 chiffres dans lequel le chiffre 1 apparaît exactement 4 fois dans le premier nombre) (**11121-11122 ; 11211-11212 ; 12111-12112 ; 21111-21112**) ; etc.

Ou : procéder par voie algébrique, sachant que la somme des chiffres du couple de jumeaux est 13, posant z et $z + 1$ les deux chiffres consécutifs qui apparaissent dans le couple, établir une équation paramétrique : si l'écriture des deux nombres utilise n fois z et m fois $(z + 1)$, on a : $n z + m (z + 1) = 13$, pour arriver à $(n + m) z = 13 – m$ et discuter les solutions pour $0 < n + m < 13$ avec $n + m$ pair (parce que le nombre total des chiffres de deux nombres consécutifs n'utilisant pas le 0 est pair) :

- pour $n + m = 12$ on obtient $12\ z = 13 – m$, donc $z = (13 – m) / 12$ dont la solution est entière seulement si $13 – m$ est un multiple de 12, donc seulement si $13 – m = 12$, sinon on aurait m négatif. On obtient $m = 1$, $n = 11$ et donc $z = 1$ et $z + 1 = 2$ et le couple de jumeaux sera formé par onze chiffres 1 et par 1 chiffre 2 avec lesquels on obtient le couple de jumeaux **111111-111112** ;
- de même pour $n + m = 10, 8, 6, 4$ et 2.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les 11 couples de jumeaux) avec explications claires de la procédure

3 Réponse correcte avec des explications peu claires
ou 9 ou 10 couples de jumeaux corrects, et aucun autre erroné

2 De 5 à 8 couples trouvés et aucun autre erroné
ou 9 ou 10 couples corrects et d'autres erronés (mais au plus 3)

1 Au moins 4 couples de jumeaux corrects trouvés

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena

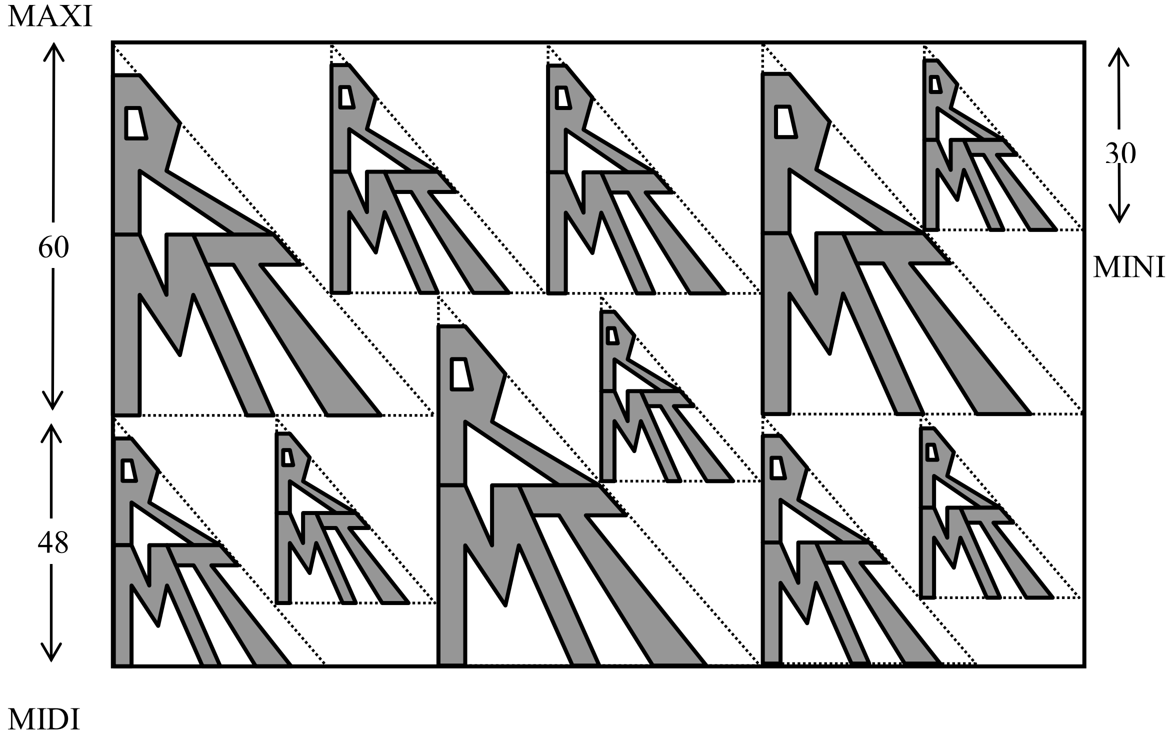
17. LES PLAQUES (Cat. 8, 9, 10)

Monsieur Ronald Mac Terror a créé des plaques magnétiques en forme de triangles rectangles, à fixer sur les portes de frigos. Trois formats sont disponibles (voir la figure) :

Le modèle « MINI » a 30 cm de hauteur.

Le modèle « MIDI » a 48 cm de hauteur.

Le modèle « MAXI » a 60 cm de hauteur.



Il a découpé soigneusement ses plaques dans la même feuille de métal et les a pesées.

Les 4 plaques « MINI » pèsent ensemble exactement 216 grammes.

Combien pèsent les 7 autres plaques ensemble ?

Donnez le résultat au gramme près.

Expliquez votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : rapports, proportionnalité
- Géométrie : rapport des aires dans un agrandissement

Analyse de la tâche

- Comprendre que la masse des plaques est proportionnelle à leur aire, puisqu'elles sont découpées dans la même feuille (d'épaisseur constante) et que les figures sont semblables, ce qui signifie que le rapport de deux longueurs correspondantes est le même, quelle que soit la direction (et qu'il n'est donc pas nécessaire d'attribuer des mesures aux côtés des triangles parallèles à la longueur de la feuille dans laquelle sont découpées les plaques).
- Calculer la masse d'un modèle MINI : 216 : 4 = 54 (en grammes).
- Calculer le rapport de proportionnalité : 60/30 = 2 entre un modèle MAXI et un modèle MINI.
- Calculer le rapport des aires des deux figures : de manière « experte » : $2^2 = 4$, ou l'observer sur le dessin en imaginant qu'un modèle MINI est inscrit dans un rectangle qui est le quart d'un rectangle dans lequel est inscrit un modèle MAXI ; ou, en se rappelant que l'aire d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b est $ab/2$, calculer que l'aire du triangle rectangle agrandi dans un rapport de longueurs r est $r^2ab/2$ et en déduire que le rapport des aires de ces deux triangles est r^2.
- Calculer la masse d'un modèle MAXI : 54 x 4 = 216 (en grammes) et la masse des 3 plaques: 216 x 3 = 648 (en grammes).

- De même, calculer le rapport entre les hauteurs MIDI/MINI, 48:30 = 1,6 et celui de leurs aires $1,6^2 = 2,56$, puis la masse d'un modèle MIDI : 54 x 2,56 = 138,24 (en grammes) et la masse des quatre plaques: 138,24 x 4 = 552,96 ≈ 553 (au gramme près).
- Additionner alors les masses des sept plaques : 648 + 552,96 = 1200,96 ≈ 1201 (en grammes)

  Une erreur attendue consiste à considérer que les masses des plaques sont proportionnelles à leurs hauteurs (et non à leurs aires), ce qui conduit aux masses des modèles MAXI et MIDI respectivement de 108 = 54 x 2 et de 86,4 = 54 x 1,6 et à la masse des sept pièces (3 x 108) + (4 x 86,4) = 669,6.

Attribution des points

4 La réponse juste 1201 grammes (ou 1200,96) avec explications (calcul des masses de chaque modèle)

3 La réponse juste 1201 grammes avec explications peu claires

ou une seule erreur de calcul (dans l'un des rapports 60/30 = 2 et 48/30 = 1,6) ou dans l'élévation au carré, …)

ou encore une réponse approchée au cas où les rapports des aires ont été estimés à 2 et 1,5

2 Réponse correcte sans aucune explication

ou réponse due à une erreur de comptage des plaques (mais avec les masses de chaque type de plaque correctes)

- ou réponse très approximative due à des attributions de mesures non proportionnelles aux côtés parallèles à la longueur de la feuille dans laquelle sont découpées les plaques

1 Début de raisonnement correct

ou la réponse 669,6 (grammes), avec confusion à propos de la proportionnalité (entre longueurs et masses, et non entre aires et masses)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : problème repris de «Logo» 13° RMT-F

18. LA TABLE DE DIVISIONS (Cat 8, 9, 10)

Jules a construit une table de divisions des nombres naturels de 1 à 100 à l'aide de son ordinateur.

Il a demandé à son programme de calcul d'arrondir les quotients au centième près (deux chiffres après la virgule) pour limiter le nombre de pages à imprimer.

Voici le coin supérieur gauche de la première page de sa table de division :

(Par exemple, à l'intersection de la colonne 4 et de la ligne 9 on trouve le quotient de 4 par 9, dont seulement les deux premières décimales sont écrites 4 : 9 ≈ 0,44.)

:	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**…**
1	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00	6.00	
2	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	
3	0.33	0.67	1.00	1.33	1.67	2.00	
4	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	
5	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	
6	0.17	0.33	0.50	0.67	0.83	1.00	
7	0.14	0.29	0.43	0.57	0.71	0.86	
8	0.13	0.25	0.38	0.50	0.63	0.75	
9	0.11	0.22	0.33	0.44	0.56	0.67	
10	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	
11	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.55	
12	0,08	0,17	0,25	0,33	0,42	0,50	

Voici un rectangle découpé, plus loin, dans la table de Jules :

0.64	0.71	0.79	**0.86**	0.93	1.00	1.07
0.60	**0.67**	0.73	0.80	0.87	0.93	1.00
0.56	**0.63**	0.69	0.75	0.81	0.88	0.94
0.53	0.59	0.65	0.71	0.76	0.82	0.88
0.50	0.56	0.61	**0.67**	0.72	0.78	0.83
0.47	0.53	0.58	**0.63**	0.68	0.74	0.79
0.45	0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75

Les deux écritures 0.67 que l'on y voit représentent-elles le même quotient ?

Les deux écritures 0.63 représentent-elles le même quotient ?

Donnez les 10 premières décimales du quotient représenté par 0.86 dans cette partie de la table.

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres rationnels, quotients, fractions équivalentes, approximations décimales

Analyse de la tâche

- Dans la table ; vérifier éventuellement quelques quotients arrondis pour comprendre le sens de lecture et les approximations au centième près. Puis observer les régularités : 1.00 dans la « grande diagonale », 0.50 pour 1 : 2 ; 2 : 4 ; 3 : 6, … Observer que les quotients équivalents sont alignés (sur des droites qui passeraient par « l'origine » (0 ; 0) de la table).
- Déterminer à quelles lignes et colonnes de la table correspondent les lignes et colonnes de l'extrait. Par exemple :
  en continuant la table (il suffit de 2 lignes et 4 colonnes pour retrouver 0.64 ; 0.71 ; 0.79 de la 1e ligne de l'extrait),
  ou en repérant dans la dernière ligne de l'extrait 0.45 ; 0.50 ; 0.55 ; 0.60 ; … les quotients de divisions par 20,
  ou par repérage des positions des quotients 1.00, puis les 0.50, puis les 0.67, …
  ou calculer les différences entre deux nombres voisins d'une ligne, par exemple la première. $x : x = 1.00$ donc pour la case à droite $(x+1) : x = 1.07$ donne $x+1 = 1{,}07x$ et $0{,}7x = 1$, ainsi $x \approx 14$ puis vérifier pour quelques autres quotients de la colonne 14 (14 :14 =1 ; 14 :15 = 0,93 …).
- Conclure que l'extrait du tableau commence à la ligne 14 et va jusqu'à la ligne 20, et des colonnes 9 à 15.
- Les deux écritures 0.67 sont donc les quotients arrondis de 10 par 15 et de 12 par 18. Ils représentent le même nombre : 2/3, arrondi à sa deuxième décimale.
- Les deux écritures 0.63 écrites sous les précédentes sont les arrondis des quotients de 10 par 16 et de 12 par 19. Ils ne sont donc pas égaux (10 : 16 = 0,625 et 10 : 19 = 0,631578…)
- Le 0.86 se situe dans la 12e colonne et à la 14e ligne de la table complète : c'est 12 :14 ou 6 :7 = 0,8571428571…

Attribution des points

4 Les trois réponses correctes : (oui, c'est le même nombre 2/3 ; non ce sont deux nombres différents 5/8 et 12/19 ; 0,8571428571… = 12/14 ou 6/7) avec explications claires

3 Les trois réponses correctes avec explications lacunaires ou confuses
ou deux des trois réponses correctes avec explications

2 Les trois réponses correctes sans explications (trouvées à la calculatrice, par essais successifs)
ou deux réponses avec explications lacunaires
ou une seule réponse correcte mais explications claires

1 deux réponses sans explications autres que des essais
ou une réponse avec un début d'explication qui témoigne de la découverte de régularités dans le tableau

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : fj