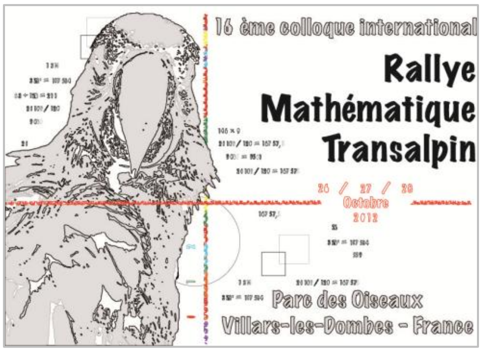
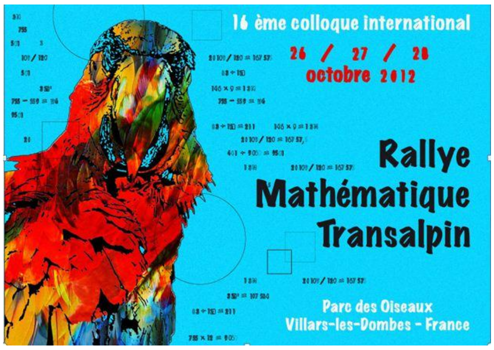
21ème Rallye Mathématique Transalpin.
Epreuve d'essai bis CAT8
Pour la section de Bourg en Bresse



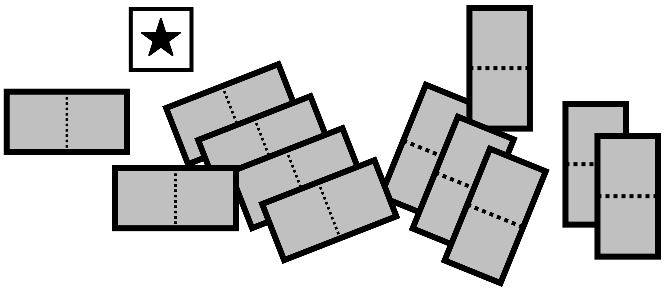
Vous trouverez ci-dessous, les problèmes de la catégorie 8 (4ème) qui sont suivis des analyses à priori et des attributions de points qui sont en vigueur sur le Rallye.
Cette épreuve d'essai doit vous permettre de savoir avec vos élèves si la participation au rallye est envisageable tout en dégageant des pistes de travail pour le comportement à avoir face à une telle situation.



11. L’ÉTOILE ET LES DOMINOS (Cat. 5, 6, 7, 8)

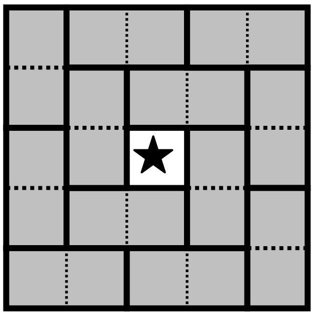
Nicolas a 12 dominos, qui permettent chacun de recouvrir deux cases de cette grille. Il a aussi un carré marqué d’une étoile, qui permet de recouvrir une case.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

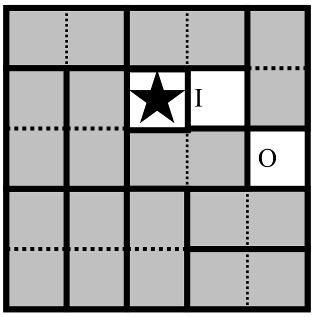


Il essaye de placer le carré sur une des cases et de recouvrir toutes les autres avec les 12 dominos.

Ici, il a placé le carré sur la case M, au milieu de la grille et il est arrivé à recouvrir la grille entière avec les 12 dominos :



Ici, il a placé le carré sur la case H, mais il n’a pas pu recouvrir la grille avec les 12 dominos :



Sur quelles cases peut-on placer l’étoile pour pouvoir ensuite recouvrir toute la grille avec les 12 dominos ?

Indiquez les cases possibles et, pour chacune d’elles, dessinez l’étoile et les 12 dominos qui recouvrent toute la grille.

Vous pouvez utiliser les grilles de la page suivante pour vos dessins.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

12. LE MOT DE PASSE (CAT. 6, 7, 8)

Marie-Thérèse Rococo a choisi un mot de passe pour son ordinateur, composé de 6 chiffres suivis de 3 lettres majuscules.

• les 6 chiffres choisis sont tous différents et le 0 ne figure pas parmi eux,
• leur somme est 23,
• les six chiffres forment un nombre inférieur à 420 000,
• le produit du premier chiffre et du dernier est 28,
• le troisième, le quatrième et le cinquième chiffre forment un nombre qui est multiple de 59,
• les trois lettres du code sont les initiales de Rococo Marie-Thérèse, dans cet ordre.

Quel est le mot de passe de Marie-Thérèse ?

Expliquez votre raisonnement.

13. MONTÉE AU REFUGE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marc et André partent ensemble pour une promenade au refuge de l'Ours. Chacun d'eux marche à allure constante. Après 30 minutes Marc, plus rapide, s'arrête pour une pause et 10 minutes plus tard, il est rejoint par André qui, lui, ne s'arrête pas et arrive au refuge exactement une heure après être parti.

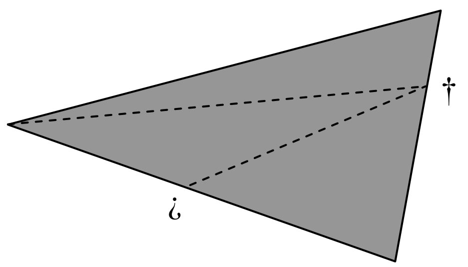
Si la pause de Marc dure 20 minutes, qui arrivera le premier au refuge ? Et combien de temps avant l'autre ?

Expliquez votre raisonnement.

14. LE MANTEAU DE ST MARTIN (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un jour où il n'avait sur lui que ses armes et son manteau fait d'une seule pièce, au milieu d'un hiver plus rigoureux qu'à l'ordinaire et si rude que bien des gens mouraient de froid, à la porte de la cité des Ambiens (Amiens), Martin rencontra deux pauvres nus. Les malheureux avaient beau prier les passants d'avoir pitié d'eux, tous passaient outre. L'homme de Dieu, voyant que les autres n'étaient pas touchés de compassion, comprit que ceux-là lui avaient été réservés. Mais que faire ? Il n'avait rien que la chlamyde (cape triangulaire) dont il était revêtu ; il avait déjà sacrifié le reste pour une bonne oeuvre analogue. Alors, il saisit son épée, dans l'intention de couper son manteau en trois triangles d'aire égale, d'en donner un à chacun des pauvres et de se draper de nouveau dans le triangle qui lui resterait.

Il étendit donc sa cape sur le sol et choisit de la couper de cette manière (selon les segments en pointillés ---), mais il ne savait pas très bien où placer les marques ¿ et † sur les côtés pour son découpage afin d'avoir trois parties de même aire.



Un ange lui apparut alors et lui dit. Concentre-toi, Martin, c'est pas difficile. Tu peux trouver exactement l'emplacement de tes marques sans faire de miracles et, même sans utiliser d'instrument de mesure, il suffit de savoir plier précisément.

Indiquez où se situent les marques ¿ et † sur les deux côtés.

Expliquez votre réponse.

15. DES PRIX QUI MONTENT ! (Cat. 7, 8, 9, 10)

En 2008 le prix d'un objet A était de 8 euros. Ce prix augmente de 2 euros le premier janvier de chaque année.

Le prix d'un objet B varie ainsi :

Il prezzo di un oggetto B varia nel seguente modo:

- le prix initial au premier janvier 2009 est 4 euros,
- le prix au premier janvier 2010 vaut 10% de plus le prix initial, de 2009,
- le prix au premier janvier 2011 vaut 20% de plus que le prix initial, de 2009,
- le prix au premier janvier 2012 vaut 30% de plus que le prix initial, de 2009.
- et ainsi, année après année.

Y aura-t-il une année où le prix de l'objet B en janvier deviendra plus élevé que le prix de l'objet A au même mois ? Si oui, en quelle année cela se produira-t-il ?

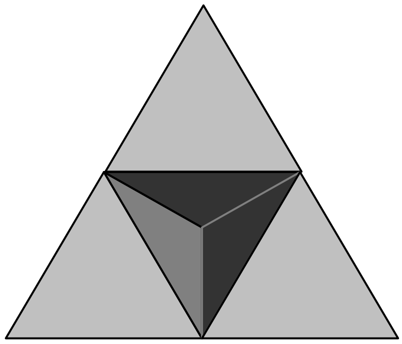
Expliquez votre raisonnement.

16. ÉTOILE DE NOËL (Cat. 8, 9, 10)

Pour décorer le sapin de la fête de Noël, Florence souhaite réaliser une étoile en 3D.

Pour cela elle a fabriqué dans une carton assez rigide un grand tétraèdre régulier d'arêtes 8 cm et quatre petits tétraèdres réguliers d'arêtes 4 cm.

Elle colle sur chacune des quatre faces du grand tétraèdre un petit tétraèdre, en plaçant les trois sommets d'une de ses faces sur les milieux des trois côtés de la face du grand. (voir figure)



Puis elle souhaite recouvrir chaque partie visible de cette étoile avec un papier décoratif de manière que chaque face de l'étoile soit recouverte d'un unique morceau de papier.

Elle dispose d'une feuille de papier de 16 cm x 14 cm.

Proposez un plan de découpage du papier décoratif montrant que la feuille est assez grande.

Expliquez pourquoi.

17. JEU D'ENCASTREMENT (Cat. 8, 9, 10)

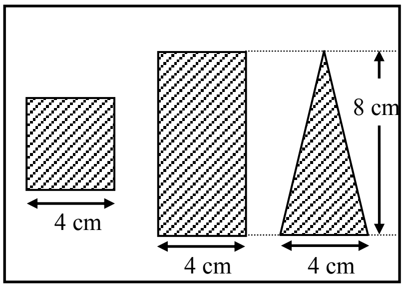
Dimitri a reçu un jeu d'encastrement constitué de quelques pièces de bois : cubes, parallélépipèdes, pyramides, prismes qu'il faut entrer dans une boîte en bois par un des trous percés dans son couvercle.

Chaque pièce bouche exactement le trou par lequel elle entre dans la boîte, sans laisser d'espace entre elle et les parois du trou.

Il y a des pièces qui ne peuvent entrer que par l'un des trous, il y en a qui peuvent entrer par deux des trous et il y en a une qui peut entrer par les trois trous.

Cette figure montre le couvercle, qui a et trois trous :

- un carré de 4 cm de côté,
- un rectangle de 4 cm sur 8 cm,
- un triangle isocèle de 4 cm de base et 8 cm de hauteur.



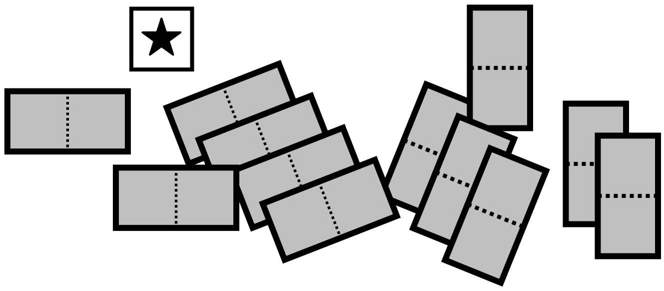
Quelle est la forme de la pièce qui peut entrer par chacun des trois trous, en le bouchant exactement lorsqu'elle y passe.

Dessinez un développement précis de cette pièce (qui permette de la construire, après l'avoir découpé, plié et ajustée avec du papier collant).

11. L'ÉTOILE ET LES DOMINOS (Cat. 5, 6, 7, 8)

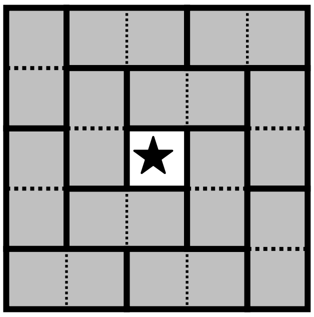
Nicolas a 12 dominos, qui permettent chacun de recouvrir deux cases de cette grille. Il a aussi un carré marqué d'une étoile, qui permet de recouvrir une case.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

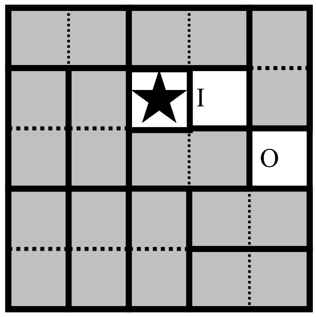


Il essaye de placer le carré sur une des cases et de recouvrir toutes les autres avec les 12 dominos.

Ici, il a placé le carré sur la case M, au milieu de la grille et il est arrivé à recouvrir la grille entière avec les 12 dominos :



Ici, il a placé le carré sur la case H, mais il n'a pas pu recouvrir la grille avec les 12 dominos :



Sur quelles cases peut-on placer l'étoile pour pouvoir ensuite recouvrir toute la grille avec les 12 dominos ?

Indiquez les cases possibles et, pour chacune d'elles, dessinez l'étoile et les 12 dominos qui recouvrent toute la grille.

Vous pouvez utiliser les grilles de la page suivante pour vos dessins.

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

A	B	C	D	E
F	G	H	I	J
K	L	M	N	O
P	Q	R	S	T
U	V	W	X	Z

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : pavage d'un carré quadrillé à l'aide de rectangles et carrés

Analyse de la tâche

- Construire les pièces et mener des essais ou trouver une manière « légère » de noter les dominos (un trait) et de les déplacer (effacer)
- Essayer, case par case, de trouver une disposition, la noter et dessiner les dominos.

Ou : à partir de l'exemple donné, retirer l'étoile de la case centrale, retirer un domino voisin puis le replacer sur la case centrale et sur une de ses voisines libérées. Il reste une case libre pour l'étoile qui peut être G, I, Q ou S. Répéter le processus à partir de la nouvelle position de l'étoile : la retirer, placer un des dominos voisins sur la case libérée et une autre ...

- Déterminer que lorsqu'une case est trouvée (par exemple coin du carré ou case « milieu d'un côté »), 3 autres sont également trouvées (par rotation ou symétrie). En dehors de la case centrale, il y a donc 3 groupes de 4 cases, soit 12 cases possibles.
- Faire l'hypothèse, après quelques essais, que les cases possibles se situent sur les diagonales de la grille ou au milieu des côtés.
- Par essais, vérifier qu'en plaçant l'étoile sur une autre case, comme dans le deuxième exemple (en H), il est impossible de recouvrir la grille avec les 12 dominos.
- Donner les 13 cases possibles : A, C, E, G, I, K, M, O, Q, S, U, W, Z avec la disposition des dominos.

Attribution des points

4 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) : A, C, E, G, I, K, O, Q, S, U, W, Z sans intrus et avec
- soit tous les dessins avec les dominos,
- soit quelques dessins et des explications qui évoquent implicitement ou explicitement les rotations, les symétries ou les diagonales

3 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) et 1 ou 2 dessins manquants ou incomplets ou explications insuffisantes

2 Les 12 autres cases trouvées (autres que M) sans dessins ni explications
ou au moins 8 cases, sans intrus, avec dessins ou explications satisfaisantes

1 8 autres cases trouvées et dessins incomplets ou explications insuffisantes
ou au moins 4 cases, sans intrus, avec dessins ou explications satisfaisantes

0 Incompréhension du problème ou moins de 4 autres cases correctes

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Groupe problèmes

12. LE MOT DE PASSE (Cat. 6, 7, 8)

Marie-Thérèse Rococo a choisi un mot de passe pour son ordinateur, composé de 6 chiffres suivis de 3 lettres majuscules.

- les 6 chiffres choisis sont tous différents et le 0 ne figure pas parmi eux,
- leur somme est 23,
- les six chiffres forment un nombre inférieur à 420 000,
- le produit du premier chiffre et du dernier est 28,
- le troisième, le quatrième et le cinquième chiffre forment un nombre qui est multiple de 59,
- les trois lettres du code sont les initiales de Rococo Marie-Thérèse, dans cet ordre.

Quel est le mot de passe de Marie-Thérèse ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres et chiffres, opérations
- Logique: relations entre les nombres, déductions, organisations des données.

Analyse de la tâche

- Comprendre que, puisque les six chiffres du code sont tous différents et qu'on connaît leur somme, on peut envisager de rechercher toutes les décompositions de 23 en sommes de 6 nombres différents et constater que - vu que $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$- qu'il n'y en a que deux $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8$ et $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7$ aux permutations près.
- Comprendre aussi que le seul produit que la seule décomposition multiplicative de 28 en produit de deux nombres d'un seul chiffre est 4×7 ou 7×4. De ces deux premières constatations, on sait que les six chiffres du nombre sont 1, 2, 3, 4, 6 et 7.
- De l'information disant que le nombre est inférieur à 420000, déduire que le premier chiffre est 4, le deuxième est 1, le sixième est 7 et chercher un nombre formé de trois chiffres restants, 2, 3 et 6 dans la liste des multiples de : 59, 118, 177, **236**, 295, 354, 413, 472, 531, 590, 649, 708, ...

  Comme 236 est le seul multiple de 59 qui convient, en déduire que le les six chiffres du code sont, dans l'ordre : 412367
- Le code complet est donc 412367RMT

Attribution des points

4 Réponse correcte (412367RMT) avec explications précises des étapes par lesquelles on est arrivé à la solution, et vérification de l'unicité de la solution (décomposition additive de 23, liste des multiples de 59 inférieurs à 700 ...)

3 Réponse correcte avec explications précises mais qui ne font pas apparaître l'unicité de la solution
ou le code numérique correct (412367) et bien expliqué, sans tenir compte des lettres

2 Réponse correcte, mais sans explications ni vérification de l'unicité de la solution
ou le code numérique correct (412367) avec explications imprécises, sans tenir compte des lettres
ou solution ne tenant pas compte d'une seule des conditions de l'énoncé

1 Début de recherche, mais sans tenir compte de deux des conditions de l'énoncé

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : FJ, adaptation d'un thème classique

13. MONTÉE AU REFUGE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marc et André partent ensemble pour une promenade au refuge de l'Ours. Chacun d'eux marche à allure constante. Après 30 minutes Marc, plus rapide, s'arrête pour une pause et 10 minutes plus tard, il est rejoint par André qui, lui, ne s'arrête pas et arrive au refuge exactement une heure après être parti.

Si la pause de Marc dure 20 minutes, qui arrivera le premier au refuge ? Et combien de temps avant l'autre ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations sur les grandeurs finies (distance, durée, vitesse), proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre que André met 40 minutes pour parcourir la première partie et donc 20 minutes pour la seconde partie
- Déduire que la distance sur la seconde partie est la moitié de celle de la première et que Marc mettra 15 minutes pour la parcourir. Si on inclut 20 minutes de pause et 30 minutes pour la première partie, Marc met en tout 65 minutes ainsi il arrive 5 minutes après André.

Ou, comme André et Marc mettent respectivement 40 minutes et 30 minutes pour effectuer un même trajet, cela signifie que le rapport de leurs vitesses est 4/3, donc Marc effectuera le second trajet dans un temps qui est les 3/4 de celui mis par André. Comme André effectue le second trajet en 20 minutes, Marc en mettra 15 (+ 20 minutes de pause)

Ou, en raisonnant de même sur le rapport des vitesses, Marc effectuera le trajet entier en un temps qui est les 3/4 de celui mis par Andrée. Comme Andrée met 60 minutes pour ce trajet, Marc marche durant 45 minutes. Avec 20 minutes de pause, cela fait 65 minutes pour arriver au refuge.

Ou, comprendre que un écart de 10 minutes sur le premier trajet correspond à un écart de 5 minutes sur le second qui est deux fois moins long. Ce raisonnement peut être favorisé par une représentation graphique.

Attribution des points :

4 Réponse correcte (André arrive 5 minutes avant Marc) avec explication complète et convaincante

3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire, ou bien raisonnement correct et bien argumenté avec une erreur de calcul

2 Réponse correcte sans explication

1 Début de raisonnement correct (par exemple calcul du rapport des vitesses ou du temps mis par Marc pour effectuer le second trajet)

ou procédure correcte avec interprétation erronée relative à la pause avec une réponse du type « Marc arrive 5 minutes avant ».

0 Incompréhension du problème

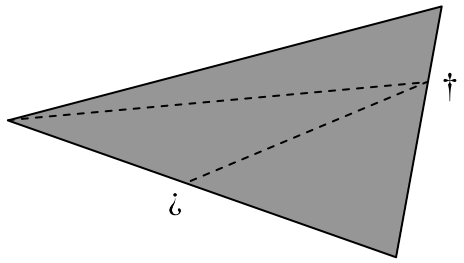
Niveaux :7, 8, 9, 10

Origine : Parma

14. LE MANTEAU DE ST MARTIN (Cat. 7, 8, 9, 10)

Un jour où il n'avait sur lui que ses armes et son manteau fait d'une seule pièce, au milieu d'un hiver plus rigoureux qu'à l'ordinaire et si rude que bien des gens mouraient de froid, à la porte de la cité des Ambiens (Amiens), Martin rencontra deux pauvres nus. Les malheureux avaient beau prier les passants d'avoir pitié d'eux, tous passaient outre. L'homme de Dieu, voyant que les autres n'étaient pas touchés de compassion, comprit que ceux-là lui avaient été réservés. Mais que faire ? Il n'avait rien que la chlamyde (cape triangulaire) dont il était revêtu ; il avait déjà sacrifié le reste pour une bonne oeuvre analogue. Alors, il saisit son épée, dans l'intention de couper son manteau en trois triangles d'aire égale, d'en donner un à chacun des pauvres et de se draper de nouveau dans le triangle qui lui resterait.

Il étendit donc sa cape sur le sol et choisit de la couper de cette manière (selon les segments en pointillés ---), mais il ne savait pas très bien où placer les marques ¿ et † sur les côtés pour son découpage afin d'avoir trois parties de même aire.



Un ange lui apparut alors et lui dit. Concentre-toi, Martin, c'est pas difficile. Tu peux trouver exactement l'emplacement de tes marques sans faire de miracles et, même sans utiliser d'instrument de mesure, il suffit de savoir plier précisément.

Indiquez où se situent les marques ¿ et † sur les deux côtés.

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : Reconnaissance de triangles. Décomposition d'une figure
- Grandeurs et mesures : propriétés de la formule d'aire d'un triangle, proportionnalité

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte et que la solution est indépendante des mesures des côtés du triangle, vu l'absence d'indications de longueurs dans l'énoncé et que la seule donnée se rapporte aux trois « triangles », de « même aire », qui est, par déduction, le tiers de celle du grand triangle.
- Constater que les deux triangles inférieurs de la figure, équivalents selon la consigne (1/3 et 1/3), ont la même hauteur par rapport à leur sommet commun, †, et qu'ils ont donc des bases isométriques. En déduire que le repère, ¿, est au milieu du côté inférieur.
- Observer les deux triangles : le triangle supérieur de la figure et le triangle constitué des deux triangles inférieurs. Constater que l'aire du second (2/3) est le double de celle du premier (1/3), qu'ils ont la même hauteur par rapport au sommet de gauche et que, par conséquent, la base du second doit être le double de celle du premier. En déduire, par proportionnalité, que le repère † se situe au tiers du côté de droite depuis le haut et au deux tiers depuis le bas.

Ou attribuer des longueurs aux côtés et hauteurs (arbitraires ou selon les mesures prises sur le dessin) des mesures inconnues (*x, y, ...*) aux distances cherchées et résoudre le problème algébriquement.

Attribution des points

4 Les réponses correctes (1/3 ou 2/3 du côté de droite et ½ du côté inférieur) avec des explications détaillées et précises.

3 Réponse correcte avec explications confuses
ou réponse correcte mais relative à des mesures choisies arbitrairement

2 Réponse correcte sans explications
ou une des réponses correcte et bien expliquée

1 Une des réponses correcte sans explication

ou début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Catégories 7, 8, 9, 10

Origine : Ticino + FJ (D'après la *Vie de St Martin* par Sulpice Sévère, vers 380)

15. DES PRIX QUI MONTENT ! (Cat. 7, 8, 9, 10)

En 2008 le prix d'un objet A était de 8 euros. Ce prix augmente de 2 euros le premier janvier de chaque année.

Le prix d'un objet B varie ainsi :

Il prezzo di un oggetto B varia nel seguente modo:

- le prix initial au premier janvier 2009 est 4 euros,
- le prix au premier janvier 2010 vaut 10% de plus le prix initial, de 2009,
- le prix au premier janvier 2011 vaut 20% de plus que le prix initial, de 2009,
- le prix au premier janvier 2012 vaut 30% de plus que le prix initial, de 2009.
- et ainsi, année après année.

Y aura-t-il une année où le prix de l'objet B en janvier deviendra plus élevé que le prix de l'objet A au même mois ? Si oui, en quelle année cela se produira-t-il ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : pourcentages
- Algèbre

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour l'objet A, l'augmentation est constante, de 2 euros par année.
- Comprendre que par contre, le prix de l'objet B n'augmente pas de façon constante.
- Procéder année après anne avec éventuellement un tableau :

année	prix A	prix B
2009	10	4
2010	12	4,4
2011	14	5,2
2012	16	6,4
2013	18	8
2014	20	10
2015	22	12,4
2016	24	15,2
2017	26	18,4
2018	28	22
2019	30	26
2020	32	30,4
2021	34	35,2
2022	36	40,4

- et observer que le prix de que le prix de l'objet B devient plus élevé que celui de A en 2021
- Ou bien (niveau expert) :

  Chercher des lois générales permettant d'exprimer le prix p des objets en fonction de n (nombe d'années à partir de 2009). Pour l'objet A on a la fonction linéaire $p=2n+10$; pour l'objet B, à l'année n, le prix initial augmente de $(1+2+3+...+n)\times 0,4$; soit en utilisant la formule de la somme des n premiers nombres : $p=4+(n+1)n\times 0,2$; ceci correspond à une fonction du second degré dont la représentation graphique est une parabole. La solution du problème s'obtient en résolvant le système des deux équations.

Attribution des points

4 Réponse correcte (1 janvier 2021) avec justification (tableau ou graphique, ...)
3 Réponse correcte avec justification peu claire ou incomplète
2 Réponse correcte sans justification ou raisonnement correct avec erreur de calcul
1 Début de raisonnement correct (par exemple calcul du prix B les premières années)
0 Incompréhension du problème

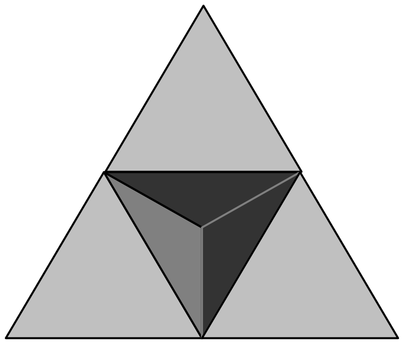
Niveaux : 7, 8, 9, 10
Origine : Parma

16. ÉTOILE DE NOËL (Cat. 8, 9, 10)

Pour décorer le sapin de la fête de Noël, Florence souhaite réaliser une étoile en 3D.

Pour cela elle a fabriqué dans une carton assez rigide un grand tétraèdre régulier d'arêtes 8 cm et quatre petits tétraèdres réguliers d'arêtes 4 cm.

Elle colle sur chacune des quatre faces du grand tétraèdre un petit tétraèdre, en plaçant les trois sommets d'une de ses faces sur les milieux des trois côtés de la face du grand. (voir figure)



Puis elle souhaite recouvrir chaque partie visible de cette étoile avec un papier décoratif de manière que chaque face de l'étoile soit recouverte d'un unique morceau de papier.

Elle dispose d'une feuille de papier de 16 cm x 14 cm.

Proposez un plan de découpage du papier décoratif montrant que la feuille est assez grande.

Expliquez pourquoi.

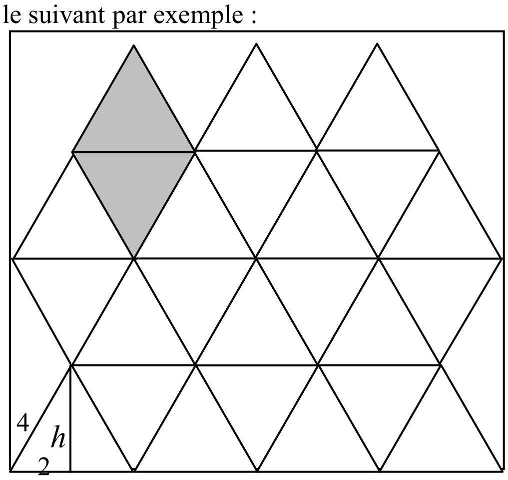
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie du solide : tétraèdre régulier)
- Géométrie plane : triangle équilatéral, droite des milieux dans un triangle, pavage
  Arithmétique et mesures : propriété de Pythagore

Analyse de la tâche

- Se rappeler qu'un tétraèdre régulier est une pyramide à 4 faces formées de triangles équilatéraux.
- Remarquer que les droites passant par les milieux des côtés d'une face du grand tétraèdre partagent celle-ci en 4 triangles équilatéraux égaux de côtés 4 cm.
- Comprendre que pour chacune des faces du grand tétraèdre, le collage d'un petit tétraèdre laisse apparents 3 petits triangles équilatéraux de 4 cm de côtés.
- Remarquer également que les faces restant visibles des petits tétraèdres collés sont formées de 3 triangles équilatéraux de mêmes dimensions.
- Dénombrer les petits triangles équilatéraux apparents : 6 pour chacune des faces du grand tétraèdre, d'où 24 en tout.
- Il s'agit de découper dans la feuille de papier décoratif donnée en 24 triangles équilatéraux de 4 cm de côté. Un pavage astucieux de cette feuille le permet, avec un plan comme le suivant par exemple :
- Pour être sûr que les 24 triangles entrent bien dans la feuille de 16 cm × 14 cm, effectuer une vérification numérique : calculer la hauteur h d'un triangle équilatéral à partir du théorème de Pythagore
  $h^2 = 4^2 - 2^2$, d'où
  $h = \sqrt{12} \approx 3{,}464$, et $4\,h \approx 13{,}856 < 14$ cm.



Attribution des points

4 Solution correcte : un dessin de la disposition des 24 triangles avec une vérification numérique

3 Solution correcte : un dessin des 24 triangles avec une vérification numérique incomplète

2 Solution correcte : un dessin des 24 triangles sans vérification numérique

1 Solution basée seulement sur une confrontation des aires des 24 triangles avec l'aire de la feuille ($24 \times 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3} < 224 = 14 \times 16$) sans vérification par le dessin

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

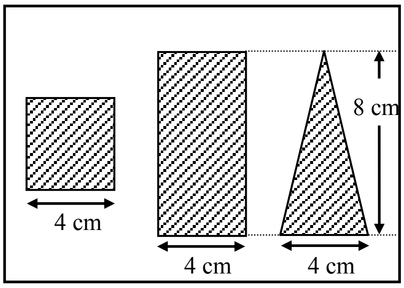
17. JEU D'ENCASTREMENT (Cat. 8, 9, 10)

Dimitri a reçu un jeu d'encastrement constitué de quelques pièces de bois : cubes, parallélépipèdes, pyramides, prismes qu'il faut entrer dans une boîte en bois par un des trous percés dans son couvercle.

Chaque pièce bouche exactement le trou par lequel elle entre dans la boîte, sans laisser d'espace entre elle et les parois du trou.

Il y a des pièces qui ne peuvent entrer que par l'un des trous, il y en a qui peuvent entrer par deux des trous et il y en a une qui peut entrer par les trois trous.

Cette figure montre le couvercle, qui a et trois trous :
- un carré de 4 cm de côté,
- un rectangle de 4 cm sur 8 cm,
- un triangle isocèle de 4 cm de base et 8 cm de hauteur.



Quelle est la forme de la pièce qui peut entrer par chacun des trois trous, en le bouchant exactement lorsqu'elle y passe.

Dessinez un développement précis de cette pièce (qui permette de la construire, après l'avoir découpé, plié et ajustée avec du papier collant).

ANALYSE A PRIORI

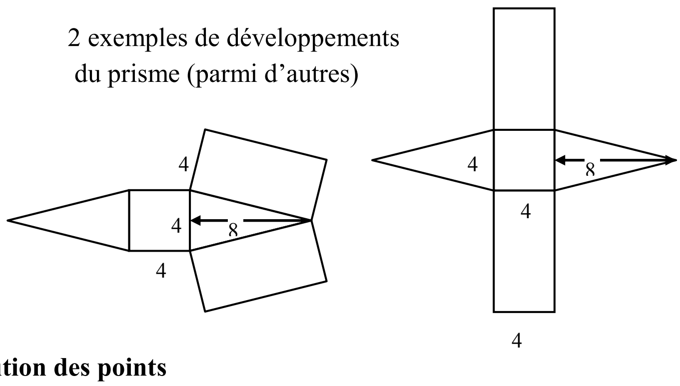
Domaine de connaissances

- Géométrie : polyèdres et développements, carré rectangle et triangle

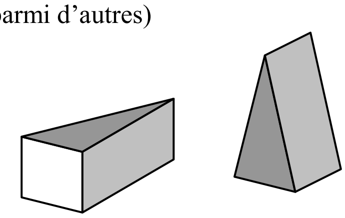
Analyse de la tâche

- Concevoir un polyèdre passant exactement par chacun trous et penser par exemple au cube de 4 cm d'arête, à un parallélépipède dont une face est le rectangle donné et à un prisme droit dont la base est le triangle donné
- Imaginer ensuite un polyèdre passant par deux des trous, par exemple un prisme droit de base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le rectangle, une pyramide régulière à base carrée de 8 cm de hauteur pour le carré et le triangle, ...
- Adapter mentalement un polyèdre passant par deux trous pour qu'il passe par le troisième. Par exemple, le prisme droit précédent peu être taillé sur deux faces rectangulaires opposées pour que les deux autres faces rectangulaires deviennent des triangles afin d'obtenir un prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm ; ou la pyramide précédente peut être complétée sur deux faces opposées pour devenir le prisme droit à base triangulaire, de hauteur 4 cm.
- Dessiner le développement, et construire éventuellement le polyèdre, dont une face est un carré de 4 cm, deux faces sont des triangles isocèles de 8 cm de hauteur et les deux autres faces des rectangles de 4 cm et dont la largeur correspond à l'un des côtés isométriques du triangle ($\sqrt{68} \cong 8,2$ cm dont l'indication n'est pas nécessaire)

2 exemples de développements du prisme (parmi d'autres)



deux vues (photos) du prisme (parmi d'autres)



Attribution des points

4 Dessin correct du développement montrant l'isométrie des longueurs des rectangles et des côtés du triangle isocèle (on n'exige pas la vraie grandeur, un dessin à l'échelle convient aussi)

3 Le polyèdre est reconnu mais le développement n'est pas correct (par exemple : les côtés des rectangles et des côtés du triangle ne sont pas isométriques)

ou le polyèdre est reconnu mais il est dessiné par une vue (photo) reconnaissable ou désigné par son nom précis et complet : prisme droit dont la base est le triangle isocèle et de hauteur 4 cm

2 Le polyèdre est reconnu mais avec un développement incomplet (faces manquantes ou se superposant) ou dessiné par une vue (photo)

ou dessin correct d'un développement de polyèdre qui ne bouche que deux trous (parallélépipède- ou prisme droit - de 4 x 4 x 8, ou pyramide régulière de base carrée et de 8 cm de hauteur, etc)

1 Dessin correct du développement d'un polyèdre qui ne bouche qu'un seul trou

0 Incompréhension du problème

Niveaux :8, 9, 10

Origine : Franche-Comté